

地球物理学（2022 年度春学期）（流体地球物理学分野）
最終テスト

注意：計算問題においては計算過程も示すこと。

1. 海上を 10 m/s の水平風が一様に吹いている。鉛直風はないものとする。この海域には A、B の 2 つの観測点があり、海上気温を測定している。ある時刻に、観測点 A で測定された気温は $10.0 \text{ }^{\circ}\text{C}$ であった。同じ時刻に 10 km 風上に位置する観測点 B で測定された気温は $9.6 \text{ }^{\circ}\text{C}$ であった。また、観測点 A、B とも気温は 10 分間に 0.3 K の割合で上昇している。この海域での海上気温 T の水平勾配 ∇T は一様であるとして、以下の問いに答えよ。国際単位系（たとえば、温度の単位は K、時間の単位は s である）に従い、適切な単位を付して解答すること。

（1）観測点 A における気温 T のオイラー微分 $\frac{\partial}{\partial t} T$ の値を求め、有効数字 1 けたで答えよ。

（2）水平風ベクトルを $\vec{u}$ としたとき、 $\vec{u} \bullet \nabla T$ の値を計算し、有効数字 1 けたで答えよ。

（3）以上の小問の結果を用いて、気温のラグランジュ微分 $\frac{D}{Dt} T$ の値を求め、有効数字 1 けたで答えよ。

2. 地衡風および摩擦がある場合の風について、以下の問いに答えよ。

地面との摩擦が効かない自由大気では、気圧座標（ p 座標）における運動方程式の x 成分（東西成分）と y 成分（南北成分）はそれぞれ、次のように書ける。

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (2)$$

ただし、 u は東西風、 v は南北風、 Φ はジオポテンシャルである。また、 f はコリオリ係数（ $f > 0$ ）で一定の値をとる。ここで、摩擦の効果を考慮して、①、②を次のように書きかえる。

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} - ru \quad (3)$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - rv \quad (4)$$

ただし、 r はゼロまたは正の定数である。以下、鉛直風はゼロとし、特定の等圧面内で大気の運動を考える。

(1) ③、④において、東西風 u と南北風 v は空間的に一様で、かつ、ジオポテンシャル Φ の東西方向の勾配はなく、南北方向の勾配は一定と仮定する。このとき、③、④は

$$\frac{d}{dt}u = fv - ru \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt}v = -fu + G - rv \quad (6)$$

と書ける。 G は定数であり、本問では、 $G > 0$ とする。⑤、⑥より、 $r = 0$ という条件のもとで、定常に達したときの u と v を求め、 f と G で表せ。

(2) 同様に、 $r > 0$ という条件のもとで、定常に達したときの u と v を求め、 f 、 r 、 G で表せ。

(3) f と G を一定に保ちながら、 r だけを変化させたとき、 v の最大値を求め、 f と G で表せ。また、そのときの水平風ベクトル $\vec{u} = (u, v)$ と等高線がなす角の大きさを求めよ。

3. 連続の式について、以下の問いに答えよ。

気圧座標（ p 座標）において、連続の式は、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad \text{①}$$

と書ける。ただし、 u 、 v 、 ω は風速の x 成分（東西成分）、 y 成分（南北成分）、 p 成分である。

(1) ①において、水平発散の鉛直分布を

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = D \cos \left(\pi \frac{p - p_1}{p_2 - p_1} \right) \quad (p_1 \leq p \leq p_2) \quad \text{②}$$

と仮定する。ただし、 D 、 p_1 、 p_2 は定数であり、 $D > 0$ 、 $0 < p_1 < p_2$ をみたす。このとき、 ω を p の関数として求めよ。ただし、境界条件として、 $p = p_1, p_2$ で $\omega = 0$ とする。符号に注意して解答せよ。

ヒント：一般に、 $\int \cos a\theta d\theta = \frac{1}{a} \sin a\theta + C$ （ C は積分定数）である。

(2) $D = 1.57 \times 10^{-4} \text{ /s}$ 、 $p_1 = 300 \text{ hPa}$ 、 $p_2 = 900 \text{ hPa}$ のとき、 $p = 600 \text{ hPa}$ における ω の値を求めよ。 ω の単位は hPa/h とし（ $1\text{h} = 3600\text{s}$ ）、有効数字2けたで答えよ。 $\pi = 3.14$ とする。符号に注意して解答せよ。

4. 熱力学方程式と、乾燥断熱減率、温位について、以下の問いに答えよ。

乾燥空気に関して、熱力学の第1法則は、次のように書ける。

$$d'Q = C_v dT + p d\alpha$$

ただし、 T 、 p 、 α は、それぞれ温度、圧力、比容（密度 ρ の逆数）であり、すべて正の値をとる。また、 C_v は定積比熱（ $C_v > 0$ ）であり、一定値をとる。ここで、断熱（ $d'Q = 0$ ）という条件のもとでは、

$$C_v dT + p d\alpha = 0 \quad \text{①}$$

が成り立つ。一方、乾燥空気を理想気体とみなせば、状態方程式は、

$$p\alpha = RT \quad \text{②}$$

と書ける。ただし、 R は気体定数（ $R > 0$ ）であり、一定値をとる。②の両辺を微分すると、

$$p d\alpha + \alpha dp = R dT$$

が得られる。これを①に代入すると、

$$C_v dT + R dT - \alpha dp = 0$$

$$C_p dT - \alpha dp = 0 \quad \text{③}$$

となる。ただし、 C_p は定圧比熱であり、 $C_p = C_v + R$ である。

(1) 静水圧平衡より、

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad \text{④}$$

が成り立つ。ただし、 g は重力加速度である。③と④を用いて、 $\frac{dT}{dz}$ を C_p と g で表せ。符号に注意して解答せよ。

(2) 物理量 θ を T と p の関数として

$$\theta = T \left(\frac{p}{p_0} \right)^\kappa \quad (5)$$

と定義する。ただし、 κ は定数である。また、 p_0 は基準となる圧力であり、これも定数である。このとき、 θ の微分 $d\theta$ は

$$d\theta = \left(\frac{p}{p_0} \right)^\kappa dT + \frac{T\kappa}{p} \left(\frac{p}{p_0} \right)^\kappa dp = \theta \left(\frac{1}{T} dT + \frac{\kappa}{p} dp \right) \quad (6)$$

と書ける。一方、②と③より、断熱という条件のもとでは、

$$C_p dT - \frac{RT}{p} dp = 0 \quad (7)$$

が成り立つ。⑥と⑦を比べることによって、断熱という条件のもとで物理量 θ が保存量になるように κ の値を定め、 C_p と R で表せ。符号に注意して解答せよ。

地球物理学（2022 年度春学期）（流体地球物理学分野）
最終テスト 解答用紙（１）

学生番号： _____ 氏名： _____

1. (1)

固定された観測点で、10 分あたり 0.3 K の割合で気温が上昇しているから、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{0.3}{10 \times 60} = \underline{5 \times 10^{-4} \text{ [K/s]}}$$

(10)

(2)

観測点 B から A に向かって 10 m/s の風が吹き、風の吹く方向に向かって気温が 10 km につき $10.0 - 9.6 = 0.4$ K 高くなっているから、

$$\vec{u} \cdot \nabla T = 10 \times \frac{0.4}{10 \times 10^3} = \underline{4 \times 10^{-4} \text{ [K/s]}}$$

(10)

(3)

(1)、(2) の結果より、

$$\frac{D}{Dt} T = \frac{\partial}{\partial t} T + \vec{u} \cdot \nabla T = 5 \times 10^{-4} + 4 \times 10^{-4} = \underline{9 \times 10^{-4} \text{ [K/s]}}$$

(10)

2. (1)

⑤、⑥において $r = 0$ を代入し、さらに定常であるから時間微分をゼロとすると、

$$\frac{d}{dt} u = f v = 0 \tag{⑤'}$$

$$\frac{d}{dt} v = -f u + G = 0 \tag{⑥'}$$

⑤'、⑥'より、

$$\underline{u = \frac{G}{f}}, \quad \underline{v = 0}$$

(10)

(2)

(1) と同様に考えて、

$$\frac{d}{dt}u = fv - ru = 0 \quad (5'')$$

$$\frac{d}{dt}v = -fu + G - rv = 0 \quad (6'')$$

(5'')より、

$$v = \frac{ru}{f}$$

(6'')に代入して、

$$\left(-f - \frac{r^2}{f}\right)u + G = 0$$

$$u = \frac{G}{f + \frac{r^2}{f}} = \frac{fG}{f^2 + r^2}$$

$v = \frac{ru}{f}$ だから、

$$v = \frac{rG}{f^2 + r^2}$$

(10)

(3)

(2) の結果より、

$$\frac{dv}{dr} = \frac{(f^2 + r^2)G - 2r^2G}{(f^2 + r^2)^2} = \frac{(f^2 - r^2)G}{(f^2 + r^2)^2}$$

だから、 $0 < r < f$ で $\frac{dv}{dr} > 0$ 、 $f < r$ で $\frac{dv}{dr} < 0$ である。したがって、 v は $r = f$

のとき、最大値 $v = \frac{G}{2f}$ をとる。このとき、 $u = \frac{G}{2f}$ である。 u と v の絶対値が等

しいから、風ベクトルと等高度線のなす角は 45° ($\frac{\pi}{4}$) である。

(10)

地球物理学（2022 年度春学期）（流体地球物理学分野）
最終テスト 解答用紙（2）

学生番号：_____ 氏名：_____

3. (1)

①、②より、

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -D \cos\left(\pi \frac{p - p_1}{p_2 - p_1}\right)$$

だから、

$$\begin{aligned}\omega &= \int \frac{\partial \omega}{\partial p} dp = -D \int \cos\left(\pi \frac{p - p_1}{p_2 - p_1}\right) dp \\ &= -\frac{D(p_2 - p_1)}{\pi} \sin\left(\pi \frac{p - p_1}{p_2 - p_1}\right) + C \quad (C \text{は積分定数})\end{aligned}$$

$p = p_1, p_2$ で $\omega = 0$ だから、 $C = 0$ となって、

$$\omega = -\frac{D(p_2 - p_1)}{\pi} \sin\left(\pi \frac{p - p_1}{p_2 - p_1}\right)$$

(10)

(2)

$p_1 = 300 \text{ hPa}$ 、 $p_2 = 900 \text{ hPa}$ 、 $p = 600 \text{ hPa}$ のとき、

$$\sin\left(\pi \frac{p - p_1}{p_2 - p_1}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

だから、

$$\omega = -\frac{D(p_2 - p_1)}{\pi} = -\frac{1.57 \times 10^{-4} \times (900 - 300) \times 100}{3.14} = -3.00 [\text{Pa/s}]$$

したがって、

$$-3.00 \times 3600 \times \frac{1}{100} = -1.08 \times 10^2 \cong \underline{\underline{-1.1 \times 10^2 [\text{hPa/h}]}}$$

(10)

4. (1)

③より、

$$\frac{dT}{dp} = \frac{\alpha}{C_p}$$

だから、 $\alpha = \frac{1}{\rho}$ より、

$$\frac{dT}{dp} = \frac{1}{C_p \rho}$$

④より、

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dz} &= \frac{dT}{dp} \times \frac{dp}{dz} \\ &= \frac{1}{C_p \rho} \times (-\rho g) \\ &= -\frac{g}{C_p}\end{aligned}$$

(10)

(2)

⑥より、物理量 θ が保存量であるためには、

$$d\theta = \theta \left(\frac{1}{T} dT + \frac{\kappa}{p} dp \right) = 0$$

$$\frac{1}{T} dT + \frac{\kappa}{p} dp = 0 \quad \text{⑧}$$

⑦をみたすすべての dT 、 dp が⑧を常にみたすためには、 dT と dp にかかる係数の比が、⑦と⑧の間で等しくなければならないから、

$$-\frac{RT}{C_p p} = \frac{\kappa T}{p}$$

したがって、

$$\kappa = -\frac{R}{C_p}$$

(10)

地球物理学（2023 年度春学期）（流体地球物理学分野）
最終テスト

注意：計算問題においては計算過程も示すこと。

1. 海上を 10 m/s の北西風が一様に吹いている。鉛直風はないものとする。この海域には A、B の 2 つの観測点があり、海上気温を測定している。ある時刻に、観測点 A で測定された気温は $10.0 \text{ }^{\circ}\text{C}$ であった。同じ時刻に 10 km 北に位置する観測点 B で測定された気温は $5.0 \text{ }^{\circ}\text{C}$ であった。また、観測点 A、B とも気温は 10 分間 に 1.5 K の割合で低下している。この海域での海上気温 T の東西勾配 $\frac{\partial}{\partial x} T$ はゼロ、南北勾配 $\frac{\partial}{\partial y} T$ は一様であるとして、以下の問いに答えよ。国際単位系（たとえば、温度の単位は K 、時間の単位は s である）に従い、適切な単位を付して解答すること。
 $\cos 45^{\circ} = \sin 45^{\circ} = 0.7$ とする。

（1）観測点 A における気温 T のオイラー微分 $\frac{\partial}{\partial t} T$ の値を求め、有効数字 2 けたで答えよ。符号に注意して解答せよ。

（2）水平風ベクトルを $\vec{u}$ としたとき、 $\vec{u} \bullet \nabla T$ の値を計算し、有効数字 2 けたで答えよ。

（3）以上の小問の結果を用いて、気温のラグランジュ微分 $\frac{D}{Dt} T$ の値を求め、有効数字 2 けたで答えよ。

2. プリミティブ方程式系の運動方程式を応用して、渦度と発散に関する以下の問いに答えよ。

気圧座標（ p 座標）における運動方程式の x 成分（東西成分）と y 成分（南北成分）を次のように書く。

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

ただし、 u 、 v 、 Φ は、それぞれ東西風、南北風、ジオポテンシャルである。 f はコリオリ係数であり、正の定数とする。ここで、運動量の移流の効果は無視できると仮定して、ラグランジュ微分をオイラー微分に置き換えると、

$$\frac{\partial}{\partial t}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (2)$$

が得られる。

(1) ①の両辺を y で偏微分し、また、②の両辺を x で偏微分し、両者の差を計算することによって、渦度^{グザイ} $\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ の時間微分 $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ を求め、 f 、 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial v}{\partial y}$ を用いて表せ。

(2) さらに、摩擦の効果を考慮して、①、②を

$$\frac{\partial}{\partial t}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} - ru \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - rv \quad (4)$$

と書きかえる。ここで、 r は正の定数であり、右辺第3項が摩擦の効果を表している。このとき、渦度 ξ の時間微分 $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ を求め、 f 、 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 、 r 、

ξ を用いて表せ。

3. 連続の式について、以下の問いに答えよ。

気圧座標（ p 座標）において、連続の式は、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad \text{①}$$

と書ける。ただし、 u 、 v 、 ω は風速の x 成分（東西成分）、 y 成分（南北成分）、 p 成分である。

(1) ①において、水平発散の鉛直分布を

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -D \cos \left(\pi \frac{p_2 - p}{p_2 - p_1} \right) \quad (p_1 \leq p \leq p_2) \quad \text{②}$$

と仮定する。ただし、 D 、 p_1 、 p_2 は定数であり、 $D > 0$ 、 $0 < p_1 < p_2$ をみたす。このとき、 ω を p の関数として求めよ。ただし、境界条件として、 $p = p_1, p_2$ で $\omega = 0$ とする。

ヒント：一般に、 $\int \cos a\theta d\theta = \frac{1}{a} \sin a\theta + C$ （ C は積分定数）である。

(2) $D = 1.57 \times 10^{-4} \text{ /s}$ 、 $p_1 = 200 \text{ hPa}$ 、 $p_2 = 900 \text{ hPa}$ のとき、 $p = 550 \text{ hPa}$ における ω の値を求めよ。 ω の単位は Pa/s とし、有効数字 2 けたで答えよ。 $\pi = 3.14$ とする。符号に注意して解答せよ。

4. 温度風の関係について、以下の問いに答えよ。

地面との摩擦が効かない自由大気では、気圧座標（ p 座標）における運動方程式の y 成分（南北成分）は

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

と書ける。ここで南北風 v は時間、場所によらずゼロであると仮定すると、

$$0 = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (1)$$

が得られる。一方、静水圧平衡の関係は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha$$

であって、理想気体の状態方程式は

$$p\alpha = RT \quad (2)$$

であるから、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p} \quad (3)$$

が成り立つ。ただし、 u 、 v は風速の x 成分（東西成分）、 y 成分（南北成分）、 Φ はジオポテンシャル、 T は温度、 α は比容（密度の逆数）である。また、 R は気体定数、 f はコリオリ係数（ $f > 0$ ）であり、いずれも一定の値をとる。

(1) ①、③を用いて、東西風の鉛直シア（圧力微分） $\frac{\partial u}{\partial p}$ を R 、 f 、 p 、 $\frac{\partial T}{\partial y}$ で表せ。

ヒント：①の両辺を p で、③の両辺を y で偏微分せよ。

(2) $\Phi = gz$ であることを考慮すると、静水圧平衡の関係は

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{g}{\alpha} \quad (4)$$

と書ける。ただし、 g は重力加速度、 z は高度である。(1)の結果と④から $\frac{\partial u}{\partial z}$ を求め、さらに②を使って、 $\frac{\partial u}{\partial z}$ を g 、 f 、 T 、 $\frac{\partial T}{\partial y}$ で表せ。

(3) 冬季の中緯度域では対流圏上層の偏西風は通常、数十 m/s に達する。(2)の結果を用いると、 $\frac{\partial T}{\partial y}$ の値から、 $\frac{\partial u}{\partial z}$ の値を計算することができる。北半球中緯度のある観測点では500 hPa面において、 $T = 2.4 \times 10^2$ K、 $\frac{\partial T}{\partial y} = -1.2 \times 10^{-5}$ K/mであった。このとき、 $\frac{\partial u}{\partial z}$ を求めよ。ただし、 $g = 1.0 \times 10$ m/s²、 $f = 1.0 \times 10^{-4}$ /s とする。解答は、国際単位系（たとえば、時間の単位は s である）にしたがい、有効数字2けたで示すこと。

地球物理学（2023 年度春学期）（流体地球物理学分野）
最終テスト 解答用紙（1）

学生番号：_____ 氏名：_____

1. (1)

固定された観測点で、10 分あたり 1.5 K の割合で気温が低下しているから、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1.5}{10 \times 60} = \underline{-2.5 \times 10^{-3} \text{ [K/s]}}$$

(10)

(2)

東西温度勾配はゼロなので、南北風と南北温度勾配のみを考えればよい。風の北向き成分は $-10 \times \sin 45^\circ = -7 \text{ m/s}$ 、北に向かって気温が 10 km につき $10.0 - 5.0 = 5.0 \text{ K}$ 低くなっているから、

$$\vec{u} \cdot \nabla T = v \frac{\partial}{\partial y} T = -7 \times \left(-\frac{5.0}{10 \times 10^3} \right) = \underline{3.5 \times 10^{-3} \text{ [K/s]}}$$

(10)

(3)

(1)、(2) の結果より、

$$\frac{D}{Dt} T = \frac{\partial}{\partial t} T + \vec{u} \cdot \nabla T = -2.5 \times 10^{-3} + 3.5 \times 10^{-3} = \underline{1.0 \times 10^{-3} \text{ [K/s]}}$$

(10)

2. (1)

①の両辺を y で偏微分して、

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = f \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \quad ①'$$

②の両辺を x で偏微分して、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) = -f \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \quad ②'$$

②' - ①' を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) &= -f \frac{\partial u}{\partial x} - f \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

したがって、

$$\underline{\frac{\partial \xi}{\partial t} = -f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)}$$

(10)

(2)

③の両辺を y で偏微分して、

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = f \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - r \frac{\partial u}{\partial y} \quad ③'$$

④の両辺を x で偏微分して、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) = -f \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - r \frac{\partial v}{\partial x} \quad ④'$$

④' - ③' を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) &= -f \frac{\partial u}{\partial x} - f \frac{\partial v}{\partial y} - r \frac{\partial v}{\partial x} + r \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - r \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

したがって、

$$\underline{\frac{\partial \xi}{\partial t} = -f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - r \xi}$$

(10)

地球物理学（2023 年度春学期）（流体地球物理学分野）
最終テスト 解答用紙（2）

学生番号：_____ 氏名：_____

3. (1)

①、②より、

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = D \cos \left(\pi \frac{p_2 - p}{p_2 - p_1} \right)$$

だから、

$$\begin{aligned} \omega &= \int \frac{\partial \omega}{\partial p} dp = D \int \cos \left(\pi \frac{p_2 - p}{p_2 - p_1} \right) dp \\ &= - \frac{D(p_2 - p_1)}{\pi} \sin \left(\pi \frac{p_2 - p}{p_2 - p_1} \right) + C \quad (C \text{は積分定数}) \end{aligned}$$

$p = p_1, p_2$ で $\omega = 0$ だから、 $C = 0$ となって、

$$\omega = - \frac{D(p_2 - p_1)}{\pi} \sin \left(\pi \frac{p_2 - p}{p_2 - p_1} \right)$$

(10)

(2)

$p_1 = 200 \text{ hPa}$ 、 $p_2 = 900 \text{ hPa}$ 、 $p = 550 \text{ hPa}$ のとき、

$$\sin \left(\pi \frac{p - p_1}{p_2 - p_1} \right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

だから、

$$\omega = - \frac{D(p_2 - p_1)}{\pi} = - \frac{1.57 \times 10^{-4} \times (900 - 200) \times 100}{3.14} = - 3.5 [\text{Pa/s}]$$

(10)

4. (1)

①の両辺を p で偏微分すると、

$$\begin{aligned} 0 &= -f \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \\ f \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1)'$$

一方、③の両辺を y で偏微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) = -\frac{R}{p} \frac{\partial T}{\partial y}$$

偏微分の順序を入れ替えて、

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = -\frac{R}{p} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3)'$$

①'、③' より、

$$\begin{aligned} f \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{R}{p} \frac{\partial T}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial p} &= \frac{R}{fp} \frac{\partial T}{\partial y} \end{aligned}$$

(10)

(2)

合成関数の微分の公式より、

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z}$$

(1) の結果と④を代入すると、

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{R}{fp} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \left(-\frac{g}{\alpha} \right) = -\frac{Rg}{fp\alpha} \frac{\partial T}{\partial y}$$

②より、 $p\alpha = RT$ だから、

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{g}{fT} \frac{\partial T}{\partial y}$$

(10)

(3)

(2) の結果より、

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1.0 \times 10}{1.0 \times 10^{-4} \times 2.4 \times 10^2} \times (-1.2 \times 10^{-5}) = \underline{5.0 \times 10^{-3} \text{ [s]}}$$

(10)

地球物理学（2024 年度春学期）（流体地球物理学分野）
期末試験

注意：計算問題においては計算過程も示すこと。

1. ある平野を 10 m/s の水平風が一様に吹いている。鉛直風はないものとする。この平野には A、B の 2 つの観測点があり、地上気温を測定している。ある時刻に、観測点 A で測定された気温は $30.0 \text{ }^{\circ}\text{C}$ であった。同じ時刻に 10 km 風上に位置する観測点 B で測定された気温は $30.8 \text{ }^{\circ}\text{C}$ であった。また、観測点 A、B とも気温は 10 分間に 0.3 K の割合で上昇している。この平野での地上気温 T の水平勾配 ∇T は一様であるとして、以下の問いに答えよ。国際単位系（たとえば、温度の単位は K 、時間の単位は s である）に従い、適切な単位を付して解答すること。

（1）観測点 A における気温 T のオイラー微分 $\frac{\partial}{\partial t} T$ の値を求め、有効数字 1 けたで答えよ。

（2）水平風ベクトルを $\vec{u}$ としたとき、 $\vec{u} \bullet \nabla T$ の値を計算し、有効数字 1 けたで答えよ。

（3）以上の小問の結果を用いて、気温のラグランジュ微分 $\frac{D}{Dt} T$ の値を求め、有効数字 1 けたで答えよ。

2. 大気の運動エネルギーについて、以下の問いに答えよ。

地面との摩擦が効かない自由大気では、気圧座標（ p 座標）における運動方程式の x 成分（東西成分）と y 成分（南北成分）はそれぞれ、次のように書ける。

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (2)$$

ただし、 u は東西風、 v は南北風、 Φ はジオポテンシャルである。また、 f はコリオリ係数（ $f > 0$ ）で一定の値をとる。以下、鉛直流はゼロとし、特定の等圧面内で大気の運動を考える。

(1) 一般にスカラーの物理量 $a = a(x, y, t)$ について、

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{a^2}{2}\right) = a \frac{D}{Dt}a \quad (3)$$

が成り立つ。①、②より、運動エネルギー $K = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ のラグランジュ微分

$$\frac{D}{Dt}K = \frac{D}{Dt}\left(\frac{u^2 + v^2}{2}\right) = u \frac{D}{Dt}u + v \frac{D}{Dt}v \quad (4)$$

を計算し、時間微分を含まない形で表せ。ただし、 ∇ を用いて

$$u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \vec{u} \bullet \nabla \Phi \quad (5)$$

と表してよい。

(2) 前問(1)の結果を用いて、各空気塊について運動エネルギー K とジオポテンシャル Φ の和が保存する、つまり、

$$\frac{D}{Dt}(K + \Phi) = 0 \quad (6)$$

であることを示せ。ただし、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

とする。

3. 連続の式について、以下の問いに答えよ。

局地的に地表面の温度が高くなると、大気境界層とよばれる対流圏の下部の大気が加熱され、大気境界層内での水平風の収束や、大気境界層上端での上昇流が生じる。本問では、連続の式を用いて、水平風の収束から鉛直風速を見積もってみよう。

気圧座標 (p 座標) において、連続の式は、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (1)$$

と書ける。ただし、 u 、 v 、 ω は風速の x 成分 (東西成分)、 y 成分 (南北成分)、 p 成分である。

(1) 1000 hPa 面で $\omega = 0$ であり、900 hPa 面から 1000 hPa 面までの水平発散 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ の平均値は $-9.8 \times 10^{-6} / \text{s}$ であるとする。900 hPa 面における ω の値を求めよ。単位は Pa/s、有効数字 2 けたで答えよ。また、符号にも注意せよ。

(2) 一般に、通常の高度座標 (z 座標) でみた上昇流 w と鉛直 p 速度 ω との関係は、

$$w = \frac{Dz}{Dt} = \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_p + \frac{\partial z}{\partial p} \frac{Dp}{Dt} = \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_p + \omega \frac{\partial z}{\partial p}$$

と書ける。等圧面高度が時間変化しない場合には、

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_p = 0$$

だから

$$w = \omega \frac{\partial z}{\partial p} \quad (2)$$

となる。また、静水圧平衡の関係は、

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

と書ける。ただし、 ρ は密度、 g は重力加速度であり、 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ とする。この関係式は、逆関数の微分の公式より、

$$\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{1}{\rho g} = -\frac{\alpha}{g} \quad (3)$$

と書きかえられる。ここで、 α は比容 (密度の逆数) であり、900 hPa 面では $\alpha = 0.90 \text{ m}^3/\text{kg}$ とする。900 hPa 面高度が時間変化しない場合、 z 座標でみた、900 hPa 面での上昇流 w の値を、②、③を用いて計算せよ。ただし、上向きを正、単位は m/s とし、有効数字 2 けたで答えよ。

4. 温度風の関係について、以下の問いに答えよ。

地面との摩擦が効かない自由大気では、気圧座標（ p 座標）における運動方程式の y 成分（南北成分）は

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

と書ける。ここで南北風 v は時間、場所によらずゼロであると仮定すると、

$$0 = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (1)$$

が得られる。一方、静水圧平衡の関係は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha$$

であって、理想気体の状態方程式は

$$p\alpha = RT \quad (2)$$

であるから、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p} \quad (3)$$

が成り立つ。ただし、 u 、 v は風速の x 成分（東西成分）、 y 成分（南北成分）、 Φ はジオポテンシャル、 T は温度、 α は比容（密度の逆数）である。また、 R は気体定数、 f はコリオリ係数（ $f > 0$ ）であり、いずれも一定の値をとる。

(1) ①、③を用いて、東西風の鉛直シア（圧力微分） $\frac{\partial u}{\partial p}$ を R 、 f 、 p 、 $\frac{\partial T}{\partial y}$ で表せ。

ヒント：①の両辺を p で、③の両辺を y で偏微分せよ。

(2) 冬季の中緯度域では対流圏上層の偏西風は通常、数十 m/s に達する。

(1) の結果を用いると、 $\frac{\partial T}{\partial y}$ の値から、 $\frac{\partial u}{\partial p}$ の値を計算することができる。北半球中緯度のある観測点では 500 hPa 面において、 $\frac{\partial T}{\partial y} = -1.0 \times 10^{-5} \text{ K/m}$ であった。このとき、 $\frac{\partial u}{\partial p}$ を求めよ。ただし、 $f = 1.0 \times 10^{-4} \text{ /s}$ 、 $R = 2.87 \times 10^2 \text{ J/kg K}$ とする。解答は m/s Pa 単位で、有効数字 2 けたで示すこと。また、符号にも注意すること。

(3) 1000 hPa から 200 hPa の範囲で、 $\frac{\partial u}{\partial p}$ が (2) で求めた値をとるとき、200 hPa での東西風 u の値を求めよ。ただし、1000 hPa では $u = 0$ とする。解答は、国際単位系にしたがい、有効数字 2 けたで示すこと。

地球物理学（2024 年度春学期）（流体地球物理学分野）
期末試験 解答用紙（1）

学生番号： _____ 氏名： _____

1. (1)

固定された観測点で、10 分あたり 0.3 K の割合で気温が上昇しているから、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{0.3}{10 \times 60} = \underline{5 \times 10^{-4} \text{ [K/s]}}$$

(10)

(2)

観測点 B から A に向かって 10 m/s の風が吹き、風の吹く方向に向かって気温が 10 km につき $30.8 - 30.0 = 0.8 \text{ K}$ 低くなっているから、

$$\vec{u} \cdot \nabla T = 10 \times \left(-\frac{0.8}{10 \times 10^3} \right) = \underline{-8 \times 10^{-4} \text{ [K/s]}}$$

(10)

(3)

(1)、(2) の結果より、

$$\frac{D}{Dt} T = \frac{\partial}{\partial t} T + \vec{u} \cdot \nabla T = 5 \times 10^{-4} - 8 \times 10^{-4} = \underline{-3 \times 10^{-4} \text{ [K/s]}}$$

(10)

2. (1)

④より、

$$\frac{D}{Dt}K = u \frac{D}{Dt}u + v \frac{D}{Dt}v$$

①、②を代入して、

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}K &= f_{uv} - u \frac{\partial \Phi}{\partial x} - f_{uv} - v \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ &= -u \frac{\partial \Phi}{\partial x} - v \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ &= \underline{-\vec{u} \bullet \nabla \Phi}\end{aligned}$$

(10)

(2)

④より、

$$\frac{D}{Dt}(K + \Phi) = \frac{D}{Dt}K + \frac{D}{Dt}\Phi = -\vec{u} \bullet \nabla \Phi + \frac{D}{Dt}\Phi$$

一般に、

$$\frac{D}{Dt}\Phi = \frac{\partial}{\partial t}\Phi + \vec{u} \bullet \nabla \Phi$$

だから、

$$\frac{D}{Dt}(K + \Phi) = -\vec{u} \bullet \nabla \Phi + \frac{\partial}{\partial t}\Phi + \vec{u} \bullet \nabla \Phi = \frac{\partial}{\partial t}\Phi$$

⑦より、

$$\underline{\frac{D}{Dt}(K + \Phi) = 0}$$

(10)

地球物理学（2024 年度春学期）（流体地球物理学分野）
期末試験 解答用紙（2）

学生番号： _____ 氏名： _____

3. (1)

①を p について $p_1 = 900$ hPa から $p_2 = 1000$ hPa まで積分すると、

$$\int_{p_1}^{p_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dp + \int_{p_1}^{p_2} \frac{\partial \omega}{\partial p} dp = 0$$

$p = p_2$ で $\omega = 0$ だから、

$$(p_2 - p_1) \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)} - \omega(p = p_1) = 0$$

したがって、

$$\begin{aligned} \omega(p = p_1) &= (p_2 - p_1) \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)} = (1000 - 900) \times 10^2 \times (-9.8 \times 10^{-6}) \\ &= \underline{-9.8 \times 10^{-2} \text{ [Pa/s]}} \end{aligned}$$

(10)

(2)

②、③より、

$$w = \omega \frac{\partial z}{\partial p} = \omega \times \left(-\frac{\alpha}{g} \right) = -\frac{\omega \alpha}{g}$$

$\omega = -9.8 \times 10^{-2}$ Pa/s、 $\alpha = 0.90$ m³/kg、 $g = 9.8$ m/s² を代入すると、

$$w = -\frac{(-9.8 \times 10^{-2}) \times 0.90}{9.8} = \underline{9.0 \times 10^{-3} \text{ [m/s]}}$$

(10)

4. (1)

①の両辺を p で偏微分すると、

$$\begin{aligned} 0 &= -f \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \\ f \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \quad \text{①'}$$

一方、③の両辺を y で偏微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) = -\frac{R}{p} \frac{\partial T}{\partial y}$$

偏微分の順序を入れ替えて、

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = -\frac{R}{p} \frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{③'}$$

①'、③' より、

$$\begin{aligned} f \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{R}{p} \frac{\partial T}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial p} &= \frac{R}{fp} \frac{\partial T}{\partial y} \end{aligned}$$

(10)

(2)

(1) の結果より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial p} &= -\frac{2.87 \times 10^2}{1.0 \times 10^{-4} \times 5 \times 10^4} \times (-1.0 \times 10^{-5}) = -5.74 \times 10^{-4} \\ &\cong \underline{\underline{-5.7 \times 10^{-4} \text{ [m/s Pa]}}} \end{aligned}$$

(10)

(3)

(2) の結果より、

$$u = -5.7 \times 10^{-4} \times (200 - 1000) \times 10^2 = 4.56 \times 10 \cong \underline{\underline{4.6 \times 10 \text{ [m/s]}}}$$

(10)