地球物理学（2021 年度春学期）（流体地球物理学分野）
最終テスト

注意：計算問題においては計算過程も示すこと。

１．ある平野を水平風が一様に吹いている。鉛直流はゼロとする。この平野にはA、Bの２つの測定点があり、地上気温を測定している。ある時刻に、観測点Aで測定された気温は 31 ℃であった。同じ時刻に 10 km 南に位置する観測点Bで測定された気温は 30 ℃であった。また、観測点A、Bとも気温は 10 分間に 0.3 K の割合で低下している。この平野では、地上気温Tは東西方向には変化せず、Tの水平勾配∇Tは一様である。また、大気自体が加熱、冷却されることはなく、断熱的であり、$\frac{D}{Dt}T=0$が成り立つ。これらの条件のもとで、以下の問いに答えよ。国際単位系（たとえば、温度の単位はK、時間の単位はsである）に従い、適切な単位を付して解答すること。

（１）観測点Aにおける気温Tのオイラー微分$\frac{\partial}{\partial t}T$の値を求め、<u>有効数字１けた</u>で答えよ。符号に注意して解答せよ。

（２）北向きにy軸をとったとき、$\frac{\partial T}{\partial y}$の値を求め、<u>有効数字１けた</u>で答えよ。

（３）以上の小問の結果を用いて、南北風vを計算し、<u>有効数字１けた</u>で答えよ。ただし、南風を正とする。

２．大気の慣性振動と地衡風について、以下の問いに答えよ。

地面との摩擦が効かない自由大気では、気圧座標（p座標）における運動方程式のx成分（東西成分）とy成分（南北成分）はそれぞれ、次のように書ける。

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad ①$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \qquad ②$$

ただし、uは東西風、vは南北風、Φはジオポテンシャルである。また、fはコリオリ係数（$f > 0$）で一定の値をとる。以下、鉛直流はゼロとし、特定の等圧面内で大気の運動を考える。

（１）①、②において、東西風uと南北風vは空間的に一様で、かつ、ジオポテンシャルΦの東西方向の勾配はなく、南北方向の勾配は一定と仮定する。このとき、①、②は

$$\frac{d}{dt}u = fv \qquad ③$$

$$\frac{d}{dt}v = -fu + G \qquad ④$$

と書ける。Gは定数であり、本問では、$G > 0$とする。③、④より、南北風vのみの（東西風uを含まない）ひとつの微分方程式を導け。

ヒント：まず、④を時刻tで微分せよ。

（２）（１）で求めた方程式から南北風vを時刻tの関数として求めよ。ただし、初期条件として、$t = 0$で静止、つまり、$u = 0$、$v = 0$とする。④において、$u = 0$のとき、$\frac{d}{dt}v = G$であることに注意せよ。

（３）東西風uを時刻tの関数として求めよ。

３．連続の式について、以下の問いに答えよ。

局地的に地表面の温度が低くなると、大気境界層とよばれる対流圏の下部の大気が冷却され、大気境界層内での水平風の発散や、大気境界層上端での下降流が生じる。本問では、連続の式を用いて、水平風の発散から鉛直風速を見積もってみよう。

気圧座標（p座標）において、連続の式は、

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial p}=0 \qquad ①$$

と書ける。ただし、u、v、ωは風速のx成分（東西成分）、y成分（南北成分）、p成分である。

（１）1000 hPa 面で$\omega=0$であり、950 hPa 面から 1000 hPa 面までの水平発散$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$の平均値は$9.8\times10^{-6}$ /sであるとする。950 hPa 面におけるωの値を求めよ。単位は hPa/s、有効数字２けたで答えよ。

（2）一般に、通常の高度座標（z 座標）でみた上昇流 w と鉛直 p 速度 ω との関係は、

$$w = \frac{Dz}{Dt} = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p + \frac{\partial z}{\partial p}\frac{Dp}{Dt} = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p + \omega\frac{\partial z}{\partial p}$$

と書ける。等圧面高度が時間変化しない場合には、

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p = 0$$

だから

$$w = \omega\frac{\partial z}{\partial p} \qquad ②$$

となる。また、静水圧平衡の関係は、

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

と書ける。ただし、ρ は密度、g は重力加速度であり、$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ とする。この関係式は、逆関数の微分の公式より、

$$\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{1}{\rho g} = -\frac{\alpha}{g} \qquad ③$$

と書きかえられる。ここで、α は比容（密度の逆数）であり、950 hPa 面では $\alpha = 0.9\,\mathrm{m^3/kg}$ とする。950 hPa 面高度が時間変化しない場合、z 座標でみた、950 hPa 面での上昇流 w の値を、②、③を用いて計算せよ。ただし、上向きを正、単位は m/s とし、有効数字 2 けたで答えよ。②に ω の値を代入するときには、単位を Pa/s に換算する必要があることに注意せよ。また、符号にも注意せよ。

４．温位と乾燥断熱減率について、以下の問いに答えよ。

（１）温位θは、温度Tと圧力pの関数として

$$\theta = T\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}} \qquad ①$$

と定義される。ただし、Rは気体定数、C_pは定圧比熱、p_0は基準となる圧力であり、いずれも正の定数である。中立成層の大気、つまり、

$$\frac{d\theta}{dp} = 0 \qquad ②$$

が成り立つ大気において、温度Tの圧力微分$\dfrac{dT}{dp}$をC_pとρで表せ。ただし、ρは密度であり、理想気体の状態方程式

$$p = \rho RT \qquad ③$$

が成り立つものとする。

ヒント：$\dfrac{d\theta}{dp} = \left(\dfrac{\partial\theta}{\partial T}\right)_p \dfrac{dT}{dp} + \left(\dfrac{\partial\theta}{\partial p}\right)_T$

（２）（１）の結果と静水圧平衡の関係から、$\dfrac{dT}{dz}$を求め、C_pと重力加速度gを用いて表せ。ただし、静水圧平衡の関係は

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \qquad ④$$

と書ける。ここで得られた解答は、乾燥断熱減率に関連している。符号に注意して解答せよ。

（余白）