地球物理学（流体地球物理学分野）　予習課題２

　これは、地球物理学（流体地球物理学分野）を履修するにあたって必要となる連続体力学の基礎知識を復習するための課題です。この予習課題２は解答例とともに配布しています。レポート用紙に解答し自分で答え合わせをしたうえで、流体地球物理学分野の初回の授業の開始時までに提出してください。

問１〔フックの法則とヤング率、ポアソン比〕

　岩石のような弾性体の中にはたらく力を考えてみよう。このようなとき、しばしば**応力**(stress)という言葉が出てくる。応力とは、面に対してはたらく単位面積あたりの力のことである。最も分かりやすい例は**圧力**(pressure)であろう。圧力は面に対して垂直にはたらく力であるが、一般に応力といえば、面に対して平行にはたらく力、つまり面をこするような方向にはたらく力も含む。x-y 平面、y-z 平面、z-x 平面というそれぞれの面に対して、x 成分、y 成分、z 成分の力がはたらくことを考えると、応力を９個の（スカラーの）数の組で表すことができる。**ベクトル**(vector)は３個の数の組として表すが、応力は９個の数の組として表す点に注意しよう。このような数の組のことを**テンソル**(tensor)とよんでいる。応力を表すテンソルのことを**応力テンソル**(stress tensor)という。

　さて、等方で均質な弾性体にはたらく応力を考えてみよう。等方均質弾性体にはたらく応力テンソル τ_{ij} は、

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\delta_{ij}\sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \tag{1}$$

応力テンソル　　　　歪みテンソル

と表せる。これは、テンソルで表現された**フックの法則**(Hooke's law)である。ここで、応力テンソル τ_{ij} は弾性体中の微小体積の立方体の j 方向の境界面にはたらく i 方向の力である。u_i は変位であり、$\partial u_i / \partial x_j$ は**歪みテンソル**(strain tensor)とよばれる。歪みテンソルも９個のスカラーの数の組として表されるテンソルである。λ、μ は**ラメ定数**(Lamé's parameters)である。

　ここで、(1)を $i = j$ の場合と $i \neq j$ の場合で場合分けして、書いてみよう。

i) $i = j$ の場合

垂直応力(normal stress) τ_{ii} について、

$$\tau_{ii} = 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \lambda \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \tag{2}$$

が得られる。垂直応力は流体力学における圧力に対応する。

ii）$i \neq j$ の場合

せん断応力(shear stress) τ_{ij} （$i \neq j$）について、

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \qquad (i \neq j) \tag{3}$$

が得られる。

(1)や(2)、(3)は、応力テンソルの各成分 τ_{ij} を歪みテンソルの各成分 $\partial u_i / \partial x_j$ の関数として表している。これは、歪みが決まれば応力が決まることを表している。バネの伸び（歪みに相当）が決まれば力（応力に相当）が決まるのと同じである。バネに関して言えば、逆に、力が決まれば伸びが決まると考えることもできる。同じように、応力テンソルの各成分が決まれば歪みテンソルの各成分が決まると考えてみよう。ここでは、歪みテンソルの各成分 $\partial u_i / \partial x_j$ のうち、特に $i = j$ の成分 $\partial u_i / \partial x_i$ に注目して、歪みテンソル $\partial u_i / \partial x_i$ を応力テンソルの各成分 τ_{ij} の関数として表してみよう。

バネ　の場合：	**伸び**	**⇔**	**力**
弾性体の場合：	**歪み**	**⇔**	**応力**

まず、(2)の各成分を書き出せば、

$$\begin{aligned}
\tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
\tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
\tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{4}$$

となる。次に、(4)の３つの式の和を計算すると、

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = (2\mu + 3\lambda) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \tag{5}$$

が得られる。(5)を

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}}{2\mu + 3\lambda}$$

と変形して、(4)の各式に代入すると、

$$\tau_{xx} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}\left(\tau_{xx}+\tau_{yy}+\tau_{zz}\right)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}\left(\tau_{xx}+\tau_{yy}+\tau_{zz}\right)$$

$$\tau_{zz} = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}\left(\tau_{xx}+\tau_{yy}+\tau_{zz}\right)$$

となる。$\partial u/\partial x$、$\partial v/\partial y$、$\partial w/\partial z$を左辺に、τ_{xx}、τ_{yy}、τ_{zz}を右辺にまとめると、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\lambda+\mu}{\mu(2\mu+3\lambda)}\tau_{xx} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}\left(\tau_{yy}+\tau_{zz}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\lambda+\mu}{\mu(2\mu+3\lambda)}\tau_{yy} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}\left(\tau_{zz}+\tau_{xx}\right) \tag{6}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\lambda+\mu}{\mu(2\mu+3\lambda)}\tau_{zz} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}\left(\tau_{xx}+\tau_{yy}\right)$$

歪み　　垂直応力

が得られる。式(6)は、垂直応力がはたらいたとき、つまり弾性体を押したり引いたりしたときに、弾性体がどのように変形するかを表している。

たとえば、1 方向（x 方向）にだけ垂直応力がはたらいたときを考えてみよう。この場合、$\tau_{xx} \neq 0$、$\tau_{yy} = \tau_{zz} = 0$である。式(6)は、

x 方向には縮む（$\partial u/\partial x < 0$）

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\lambda+\mu}{\mu(2\mu+3\lambda)}\tau_{xx}$$

y, z 方向には膨らむ（$\dfrac{\partial v}{\partial y} > 0$、$\dfrac{\partial w}{\partial z} > 0$）

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}\tau_{xx}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}\tau_{xx}$$

x 方向に押されると…（$\tau_{xx} < 0$）

となる。垂直応力τ_{xx}を与えると、その方向に引張や圧縮（$\partial u/\partial x$）が生じるのは当然だが、それだけでなく、垂直な方向にも引張や圧縮（$\partial v/\partial y$、$\partial w/\partial z$）が生じることを示している。ラメ定数λ、μが正の場合、たとえば、x 方向に押されると（$\tau_{xx} < 0$）、x 方向には縮む（$\partial u/\partial x < 0$）が、同時に y 方向や z 方向には膨らむ（$\partial v/\partial y > 0$、$\partial w/\partial z > 0$）ことが分かる。

（1）体積弾性率Kは、

$$p = -K\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

と定義される。ただし、pは圧力であり、

$$p=-\frac{1}{3}\left(\tau_{xx}+\tau_{yy}+\tau_{zz}\right)$$

が成り立つ。式(5)を用いて体積弾性率を求め、λ、μで表せ。

（２）**ヤング率**(Young's modulus) E とは、１方向にだけ垂直応力がはたらいたとき、垂直応力と、その方向に生じた引張や圧縮との比である（たとえば、$E=\dfrac{\tau_{xx}}{\partial u/\partial x}$）。式(6)を用いてヤング率を求め、$\lambda$、$\mu$で表せ。

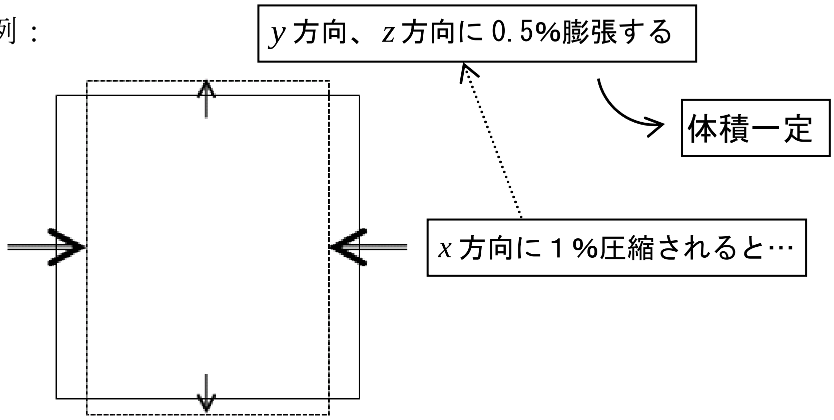
ヤング率はバネにおけるバネ定数に相当する。

バネ　の場合：	力	＝	バネ定数	×	伸び
弾性体の場合：	応力	＝	ヤング率	×	歪み

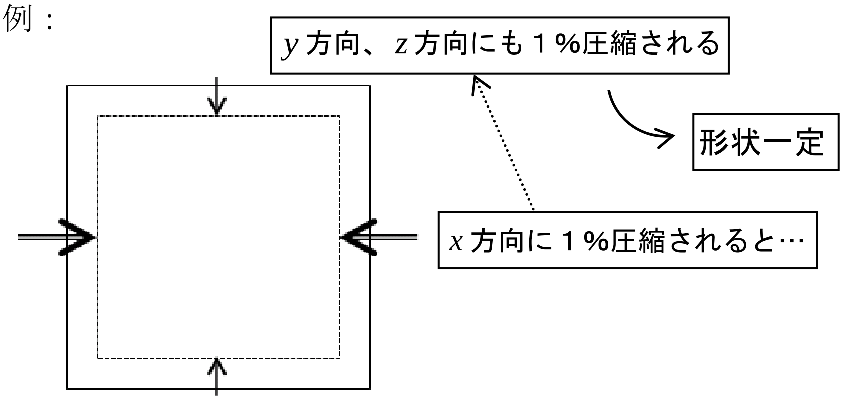
（３）**ポアソン比**(Poisson's ratio) ν とは、１方向にだけ垂直応力がはたらいたとき、応力に垂直な方向に生じた引張（圧縮）と、応力に平行な方向に生じた圧縮（引張）との比である（たとえば、$\nu=-\dfrac{\partial v/\partial y}{\partial u/\partial x}=-\dfrac{\partial w/\partial z}{\partial u/\partial x}$）。式(6)を用いてポアソン比を求め、$\lambda$、$\mu$で表せ。

ポアソン比の典型的な値を例にして、ポアソン比の物理的な意味を考えてみよう。

i) $\nu=0.5$の例：



ii）$\nu = -1$ の例：



（4）多くの岩石では λ と μ は近い値をとる。$\lambda = \mu$ のとき、ポアソン比の値を求めよ。

一般にポアソン比 ν の範囲は、$-1 \le \nu \le 0.5$ である。現実の岩石は 0.25 に近い値をとることが多く、通常は $0 < \nu < 0.5$ である。$-1 < \nu < 0$ となるような結晶は非常に稀であるが、存在しないわけではない。

問２〔運動方程式と地震波〕

弾性体内部の微小体積の立方体についての運動方程式を書いてみよう。たとえば、運動方程式の x 成分を考えよう。x 方向の加速度は x 方向の変位 u の時間２階微分 $\partial^2 u / \partial t^2$ である。とりあえず、x 方向の力を F とおけば、運動方程式を

$$\underbrace{\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u}_{\boxed{\text{加速度}}} = \underbrace{F}_{\boxed{\text{力}}}$$

と書いてよい。

次に、x 方向の力 F を具体的に考えていこう。ここでは、x 方向、y 方向、z 方向のそれぞれの面にはたらく x 方向の応力（応力の定義＝面にはたらく力）を考える必要がある。はじめに、x 方向の面にはたらく x 方向の応力から考えよう。これは面に垂直にはたらく応力であるから、垂直応力である。垂直応力は流体力学における圧力に相当する。圧力によって生じる正味の力、**気圧傾度力** (pressure gradient force)は、

$$F = -\frac{\partial}{\partial x} p \qquad \boxed{\text{圧力の勾配}}$$

と書けたことを思い出そう。垂直応力によって弾性体にはたらく正味の力も気圧傾度力と同じように考えて、

$$F_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx} \qquad \boxed{\text{垂直応力の勾配}}$$

と書いてよい。ただし、応力の定義上、符号は逆になっている（応力は引っ張られる方向が正である）ことに注意しておこう。

さらに、y 方向の面にはたらく x 方向の応力から考えよう。これは面に平行にはたらくせん断応力である。気圧（垂直応力）が空間的に一様だったら気圧傾度力は生じない。同様に、せん断応力も空間的に一様だったら正味の加速度は生じない。したがって、せん断応力の場合も、垂直応力の場合と同じように考えて、

$$F_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\tau_{xy} \qquad \boxed{\text{せん断応力の勾配}}$$

と書くことができる。z 方向の面にはたらく x 方向の応力も同様に、

$$F_{xz} = \frac{\partial}{\partial z}\tau_{xz} \qquad \boxed{\text{せん断応力の勾配}}$$

と書ける。これらの結果をまとめると、結局、

$$F = \frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{xz} = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\tau_{xj} \qquad \boxed{\text{応力の勾配の和}}$$

となることが分かる。したがって、運動方程式の x 成分は、

$$\underbrace{\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}u}_{\boxed{\text{加速度}}} = \underbrace{\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\tau_{xj}}_{\boxed{\text{力}}} \qquad \boxed{\text{応力の勾配の和}}$$

である。

運動方程式の y 成分、z 成分も同様に考えると、運動方程式は、一般に

$$\underline{\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\tau_{ij}} \tag{7}$$

と書ける。

あらためて、(7)の各成分を書き出せば、

$$\begin{aligned}
\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{xz} \\
\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{yz}
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\tau_{zx} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{zy} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zz}$$

となる。一方で、応力テンソルは、(2)、(3)より、

$$\begin{aligned}
\tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
\tau_{xy} &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
\tau_{xz} &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\
&\cdots \\
&\cdots \\
&\cdots \\
&\cdots \\
&\cdots \\
&\cdots
\end{aligned} \tag{9}$$

と表される。(9)を(8)に代入すると、

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \mu\nabla^2 u \\
\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \mu\nabla^2 v \\
\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \mu\nabla^2 w
\end{aligned} \tag{10}$$

となる。これは、フックの法則のもとでの弾性体の運動方程式である。運動方程式(10)を用いて、**地震波**(seismic wave)の**位相速度**(phase velocity)を計算しよう。

（１） **P 波**(primary wave)においては、波が伝播する方向と平行な方向に変位が生じる。たとえば、波が x 方向に伝播する場合、$u \neq 0$、$v = w = 0$ である。x 方向に伝播するので、u は $u = \mathrm{Re}\,\hat{u}\exp[i(kx - \omega t)]$（$\hat{u}$ は定数）と書ける。これらを(10)の第 1 式に代入することによって、P 波の位相速度 $c = \omega / k$（$c > 0$）を求めよ。

（２） **S 波**(secondary wave)においては、波が伝播する方向と垂直な方向に変位が生じる。たとえば、波が x 方向に伝播し、変位が y 方向に生じる場合、$v \neq 0$、$u = w = 0$ である。x 方向に伝播するので、v は $v = \mathrm{Re}\,\hat{v}\exp[i(kx - \omega t)]$（$\hat{v}$ は定数）と書ける。これらを(10)の第 2 式に代入することによって、S 波の位相速度

$c = \omega / k$ （$c > 0$）を求めよ。

（3）多くの岩石ではλとμは近い値をとる。$\lambda = \mu$のとき、S波の位相速度に対するP波の位相速度の比を求めよ。

問３〔重力と静水圧平衡〕

完全に球形で半径Rの惑星の内部の密度ρが中心からの距離rの関数として与えられているとする。このとき、中心からの距離rにおける重力の大きさは、距離rよりも内側にある質量の総量と等しい質量を持つ質点が惑星の中心にあると仮定した場合の重力の大きさに等しくなる。中心からの距離rよりも外側の質量は重力の大きさに影響せず、また、総量が等しければ距離rよりも内側での質量の分布形も重力の大きさに影響しない。このとき、中心からの距離r（$0 < r \le R$）における重力加速度gは、

$$g = \frac{G}{r^2}\int_0^r 4\pi r'^2 \rho dr' \qquad (11)$$

と書ける。Gは万有引力定数である。gは定数ではなく、rの関数であることに注意する。なお、重力は本来、万有引力と遠心力の合力であるが、ここでは惑星の自転を無視し、万有引力のみを考慮している。

（1）密度ρが中心からの距離rによらない定数としたとき、重力加速度gをrの関数として求めよ。ただし、$0 < r \le R$とする。

（2）惑星内部の圧力pに関して**静水圧平衡**(hydrostatic balance)が成り立っているとする。つまり、

$$\frac{dp}{dr} = -\rho g \qquad (12)$$

と書けるものとする。（1）で求めたgを用いて、圧力pをrの関数として求めよ。ただし、$0 < r \le R$とする。また、大気圧は無視し、$r = R$で$p = 0$とする。

解答例：

問１

（１）体積弾性率の定義から、

$$K = -\frac{p}{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}} = \frac{\tau_{xx}+\tau_{yy}+\tau_{zz}}{3\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)}$$

が成り立つので、式(5)より、

$$K = \frac{2\mu+3\lambda}{3}$$

（２）式(6)の第１式で$\tau_{yy}=\tau_{zz}=0$とすると、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\lambda+\mu}{\mu(2\mu+3\lambda)}\tau_{xx}$$

だから、

$$E = \frac{\mu(2\mu+3\lambda)}{\lambda+\mu}$$

（３）式(6)の第 1～3 式で$\tau_{yy}=\tau_{zz}=0$とすると、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\lambda+\mu}{\mu(2\mu+3\lambda)}\tau_{xx}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}\tau_{xx}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}\tau_{xx}$$

だから、

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

（４）（３）の解で$\lambda=\mu$とすると、

$$\nu = \frac{1}{4}$$

問２

（１）(10)の第１式に$v=w=0$を代入すると、

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \nabla^2 u$$

さらに、$u = \mathrm{Re}\,\hat{u}\exp[i(kx - \omega t)]$を代入すると、

$$-\rho\omega^2 \hat{u}\exp[i(kx - \omega t)] = -(\lambda + \mu)k^2 \hat{u}\exp[i(kx - \omega t)] - \mu k^2 \hat{u}\exp[i(kx - \omega t)]$$

だから、

$$-\rho\omega^2 = -(\lambda + 2\mu)k^2$$

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

（２）(10)の第２式に$u = w = 0$を代入すると、

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \nabla^2 v$$

さらに、$v = \mathrm{Re}\,\hat{v}\exp[i(kx - \omega t)]$を代入すると、

$$-\rho\omega^2 \hat{v}\exp[i(kx - \omega t)] = -\mu k^2 \hat{v}\exp[i(kx - \omega t)]$$

だから、

$$-\rho\omega^2 = -\mu k^2$$

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

（３）$\lambda = \mu$のとき、位相速度の比は、

$$\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}} = \sqrt{3}$$

問３

（１）(11)より、

$$g = \frac{G}{r^2}\int_0^r 4\pi r'^2 \rho dr' = \frac{G}{r^2}\left[\frac{4}{3}\pi\rho r'^3\right]_0^r = \frac{4}{3}\pi G\rho r$$

（２）(12)と（１）の結果より、

$$\frac{dp}{dr} = -\rho g = -\frac{4}{3}\pi G\rho^2 r$$

$r = R$で$p = 0$だから、

$$p = -\int_r^R \frac{dp}{dr'} dr' = \int_r^R \frac{4}{3}\pi G\rho^2 r' dr' = \left[\frac{2}{3}\pi G\rho^2 r'^2\right]_r^R = \frac{2}{3}\pi G\rho^2\left(R^2 - r^2\right)$$