地球物理学（2020 年度春学期）（流体地球物理学分野）
最終テスト

注意：計算問題においては計算過程も示すこと。

１．ある平野を 10 m/s の風が一様に吹いている。この平野には A、B の２つの測定点があり、地上気温と相対湿度、気圧を測定している。気温と湿度、気圧から、比湿（単位質量の空気に含まれる水蒸気の質量）を計算することができる。ある時刻に観測点 A で求められた比湿は1.20×10^{-2}（＝12.0 g/kg）であった。同じ時刻に 10 km 風上に位置する観測点 B で求められた比湿は1.14×10^{-2}（＝11.4 g/kg）であった。また、観測点 A、B とも比湿は 10 分間に3×10^{-4}（＝0.3 g/kg）の割合で低下している。この平野での地上の比湿 q の水平勾配 ∇q は一様であるとして、以下の問いに答えよ。解答は、国際単位系（たとえば、時間の単位は s である）に従うこと。

（１）観測点 A における比湿 q のオイラー微分 $\dfrac{\partial}{\partial t}q$ の値を求め、<u>有効数字１けた</u>で答えよ。符号に注意して解答せよ。

（２）水平風ベクトルを $\vec{u}$ としたとき、$\vec{u}\bullet\nabla q$ の値を計算し、<u>有効数字１けた</u>で答えよ。

（３）以上の小問の結果を用いて、比湿 q のラグランジュ微分 $\dfrac{D}{Dt}q$ の値を計算し、<u>有効数字１けた</u>で答えよ。

（余白）

２．プリミティブ方程式系の運動方程式を応用して、渦度と発散に関する以下の問いに答えよ。

気圧座標（p 座標）における運動方程式の x 成分（東西成分）と y 成分（南北成分）を次のように書く。

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

ただし、u、v、Φ は、それぞれ東西風、南北風、ジオポテンシャルである。f はコリオリ係数であり、正の定数とする。ここで、運動量の移流の効果は無視できると仮定して、ラグランジュ微分をオイラー微分に置き換えると、

$$\frac{\partial}{\partial t}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad ①$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \qquad ②$$

が得られる。さらに、摩擦の効果を考慮して、①、②を

$$\frac{\partial}{\partial t}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} - ru \qquad ③$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - rv \qquad ④$$

と書きかえる。ここで、r は正の定数であり、右辺第３項が摩擦の効果を表している。

（１）③の両辺を y で偏微分し、また、④の両辺を x で偏微分し、両者の差を計算することによって、渦度 ξ（グザイ）$= \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$ の時間微分 $\dfrac{\partial \xi}{\partial t}$ を求め、f、$\dfrac{\partial u}{\partial x}$、$\dfrac{\partial v}{\partial y}$、$r$、$\xi$ を用いて表せ。

（２）小問（１）で得られた方程式において、定常を仮定し、時間微分をゼロにすることによって、水平発散 $D = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}$ を求め、f 、r 、ξ を用いて表せ。ここで解答として得られる方程式は、低気圧性の渦に摩擦が働くと水平収束が生じることを表している。

３．連続の式について、以下の問いに答えよ。

局地的に地表面の温度が高くなると、大気境界層とよばれる対流圏の下部の大気が加熱され、大気境界層ないでの水平風の収束や、大気境界層上端での上昇流が生じる。本問では、連続の式を用いて、水平風の収束から鉛直風速を見積もってみよう。

　気圧座標（ p 座標）において、連続の式は、

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial p}=0 \qquad ①$$

と書ける。ただし、u 、v 、ω は風速の x 成分（東西成分）、 y 成分（南北成分）、 p 成分である。

（１）1000 hPa 面で $\omega=0$ であり、900 hPa 面から 1000 hPa 面までの水平発散 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$ の平均値は -4.9×10^{-5} /s であるとする。900 hPa 面における ω の値を求めよ。単位は hPa/s、有効数字２けたで答えよ。通常の高度座標（z 座標）では上昇流、つまり、ω （鉛直 p 速度）は負になっているはずである。符号に注意して解答せよ。

（２）一般に、通常の高度座標（z 座標）でみた上昇流 w と鉛直 p 速度 ω との関係は、

$$w = \frac{Dz}{Dt} = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p + \frac{\partial z}{\partial p}\frac{Dp}{Dt} = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p + \omega\frac{\partial z}{\partial p}$$

と書ける。等圧面高度が時間変化しない場合には、

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p = 0$$

だから

$$w = \omega\frac{\partial z}{\partial p} \qquad ②$$

となる。また、静水圧平衡の関係は、

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

と書ける。ただし、ρ は密度、g は重力加速度であり、$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ とする。この関係式は、逆関数の微分の公式より、

$$\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{1}{\rho g} \qquad ③$$

と書きかえられる。ここで、900 hPa 面では $\rho = 1.0\,\mathrm{kg/m^3}$ とする。900 hPa 面高度が時間変化しない場合、z 座標でみた、900 hPa 面での上昇流 w の値を、②、③を用いて計算せよ。ただし、上向きを正、単位は m/s とし、有効数字２けたで答えよ。②に ω の値を代入するときには、単位を Pa/s に換算する必要があることに注意せよ（1 hPa ＝ 100 Pa）。

４. 熱力学方程式と、乾燥断熱減率、温位について、以下の問いに答えよ。

乾燥空気に関して、熱力学の第１法則は、次のように書ける。

$$d'Q = C_v dT + p d\alpha$$

ただし、T 、 p 、 α は、それぞれ温度、圧力、比容（密度 ρ の逆数）であり、すべて正の値をとる。また、C_v は定積比熱（$C_v > 0$）であり、一定値をとる。したがって、断熱（$d'Q = 0$）という条件のもとでは、

$$C_v dT + p d\alpha = 0 \qquad ①$$

が成り立つ。一方、乾燥空気を理想気体とみなせば、状態方程式は、

$$p\alpha = RT \qquad ②$$

と書ける。ただし、R は気体定数（$R > 0$）であり、一定値をとる。②の両辺を微分すると、

$$p d\alpha + \alpha dp = RdT$$

が得られる。これを①に代入すると、

$$C_v dT + RdT - \alpha dp = 0$$

$$C_p dT - \alpha dp = 0 \qquad ③$$

となる。ただし、C_p は定圧比熱であり、$C_p = C_v + R$ である。

（１）③より、$\dfrac{dT}{dz}$ を求め、C_p と重力加速度 g を用いて表せ。ただし、静水圧平衡の関係

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \qquad ④$$

を用いてよい。ここで得られた解答は、乾燥断熱減率に関連している。符号に注意して解答せよ。

（２）温位θは、Tとpの関数として

$$\theta = T\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}} \qquad ⑤$$

と定義される。ただし、p_0は基準となる圧力であり、定数である。等温大気（温度Tが一定の大気）において、温位θの圧力微分$\dfrac{d\theta}{dp}$をR、C_p、θ、pで（p_0を含まない形で）表せ。符号に注意せよ。

（３）等温大気（温度Tが一定の大気）において、温位θの高度微分$\dfrac{d\theta}{dz}$をg、C_p、θ、Tで（p_0を含まない形で）表せ。対流圏では、通常は、上空に行くほど気温が低くなっているので、等温大気は、通常よりも安定度の高い大気とみなすことができる。