

地球物理学（流体地球物理学分野）

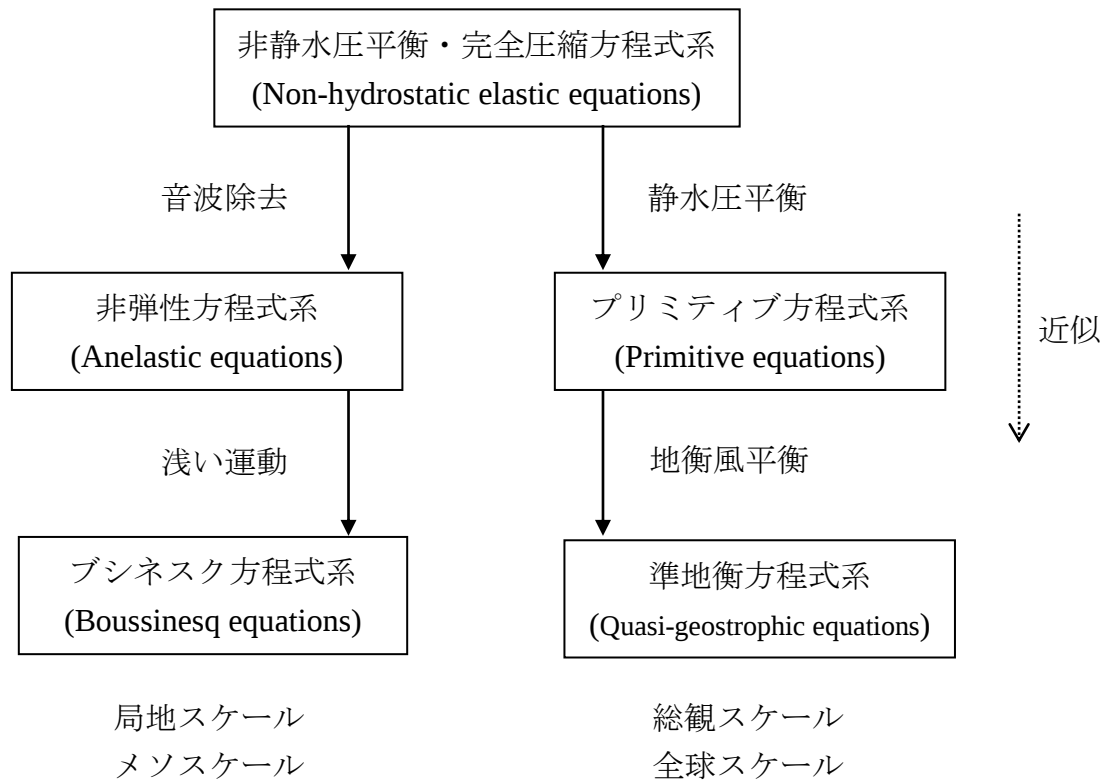
（2020 年度春学期）

目次

0	気象学で用いる方程式系	1
1	ナビエ・ストークスの方程式	2
2	回転系における運動方程式	6
3	気圧座標	10
4	連続の式	14
5	熱力学方程式	20
6	プリミティブ方程式系	26
補遺 1	静水圧平衡と地衡風平衡	27
補遺 2	慣性振動と浮力振動	32
補遺 3	連続の式	36
補遺 4	乾燥静的エネルギー	37
7	渦度方程式	38
8	準地衡方程式系	46
9	傾圧不安定	55

0 気象学で用いる方程式系

気象学においては、大気の運動を記述するために、流体力学に基づいた、いくつかの方程式系が用いられる。



この授業の前半では、流体力学の考えかたの基礎を習得するとともに、温帯低気圧のような比較的大きな空間スケールの現象を扱うために用いられる、プリミティブ方程式系を中心に学ぶ。後半では、プリミティブ方程式系から準地衡方程式系を導出し、温帯低気圧の発達仕組みである傾圧不安定について学習する。

1 ナビエ・ストークスの方程式

温度の高い水が上流から流れてくる状況を考えてみる。固定した観測点にいる観測者からみると、

「水温の高い水が流れてくるので水温が上昇する」

と考えられる。一方、水流に乗って測定している観測者からみると、

「水温は時間変化しない」

と考えることができる。流体の運動を考えるときには、このような2種類の時間変化を区別して取り扱う必要がある。

1. 1 オイラー微分とラグランジュ微分

はじめに、あるスカラーの物理量 $a(x, y, z, t)$ の時間微分を考えてみる。流体力学においては、**オイラー微分（局所微分）** (Eulerian derivative) と **ラグランジュ微分（物質微分）** (Lagrangian derivative) という2種類の時間微分があり、両者を区別する必要がある。オイラー微分とは、空間のある一点にとどまって観測した時間変化である。スカラーの物理量 $a(x, y, z, t)$ のオイラー微分は、偏微分を用いて、 $\frac{\partial}{\partial t} a$ と表わされる。

一方、ラグランジュ微分とは、流体の流れに乗って移動しながら観測した時間変化である。流れに乗って移動する観測者が、ある時刻 t に (x, y, z) にいるとする。流速を $\vec{u} = (u, v, w)$ とすると、微小な時間 δt 経過後には、観測者は $(x + u\delta t, y + v\delta t, z + w\delta t)$ にいる。ゆえに、この観測者が観測する物理量 $a(x, y, z, t)$ は微小な時間 δt 経過後には、 $a(x + u\delta t, y + v\delta t, z + w\delta t, t + \delta t)$ に変化している。したがって、物理量 $a(x, y, z, t)$ のラグランジュ微分は、

$$\frac{\partial}{\partial t} a + u \frac{\partial}{\partial x} a + v \frac{\partial}{\partial y} a + w \frac{\partial}{\partial z} a = \frac{\partial}{\partial t} a + \vec{u} \cdot \nabla a$$

である。流体力学ではラグランジュ微分を

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \quad (1)$$

と定義する。たとえば、物理量 $a(x, y, z, t)$ のラグランジュ微分は $\frac{D}{Dt} a$ と表される。

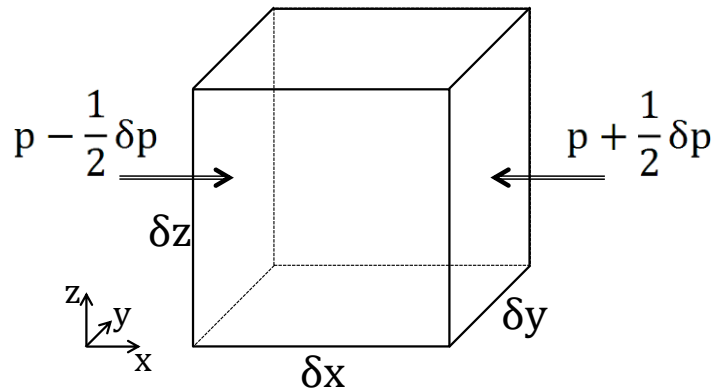
オイラー微分とラグランジュ微分の違いは、 $\vec{u} \cdot \nabla$ という項の有無である。 $\vec{u} \cdot \nabla$ は移流項とよばれ、移流の効果を表している。

大気のような流体が運動するのは、流体に力がはたらくからである。流体にはたらく力として、重力、気圧傾度力、粘性の3つを取り上げて、方程式でどのように表現できるか考える。

1. 2 流体にはたらく力

ここでは、微小な体積 $\delta x \delta y \delta z$ の流体にはたらく力を考える。まず、**重力**(gravity force)は質量 $\rho \delta x \delta y \delta z$ に重力加速度ベクトル $\vec{g}$ をかけたものであるから $\rho \vec{g} \delta x \delta y \delta z$ と書ける。したがって、単位体積あたりにはたらく重力は $\rho \vec{g}$ である。

次に、**気圧傾度力**(pressure gradient force)を考える。気圧傾度力は、気圧勾配によって生じる力である。気圧（圧力）とは、流体の境界面に対して垂直にはたらく、単位面積あたりの力の大きさである。圧力は、 $-x$ 方向の境界面に対しては $+x$ 方向に、 $+x$ 方向の境界面に対しては $-x$ 方向にはたらく。ここで圧力 p が x 方向に一様であれば、流体にはたらく正味の x 方向の力はゼロである。しかし、 p が x 方向に変化していれば、流体に正味の力がはたらく。



3次元空間の中で固定された微小な領域 $\delta x \delta y \delta z$ において、 $+x$ 方向の境界面での圧力を $p + \frac{1}{2} \delta p$ 、 $-x$ 方向の境界面での圧力を $p - \frac{1}{2} \delta p$ とする。境界面の面積は $\delta y \delta z$ だから、 $+x$ 方向の境界面にはたらく力は $-\left(p + \frac{1}{2} \delta p\right) \delta y \delta z$ 、 $-x$ 方向の境界面にはたらく力は $\left(p - \frac{1}{2} \delta p\right) \delta y \delta z$ である。両者の和を計算すると、

$$-\left(p + \frac{1}{2} \delta p\right) \delta y \delta z + \left(p - \frac{1}{2} \delta p\right) \delta y \delta z = -\delta p \delta y \delta z$$

となる。これを体積 $\delta x \delta y \delta z$ で割ると、 $-\frac{\delta p \delta y \delta z}{\delta x \delta y \delta z} = -\frac{\delta p}{\delta x}$ となる。これが単位体積あたりにはたらく気圧傾度力の x 成分である。微小な体積を考えているので、微

分を用いて、気圧傾度力の x 成分を $-\frac{\partial}{\partial x}p$ と書くことができる。 y 方向、 z 方向も考慮すれば、気圧傾度力は $-\nabla p$ となる。

さらに、**粘性(viscosity)**の効果を考える。粘性とは運動量の拡散（平滑化）である。熱伝導方程式において熱拡散の効果は $k\nabla^2 T$ と書かれた。これは、ある場所の温度に比べて周囲の温度のほうが高いとき、その場所の温度が上昇することを表している。運動量についても同様に考えることができる。たとえば、ある場所における x 方向の速度 u に比べて周囲の速度のほうが大きいとき、粘性の効果によって、その場所の速度 u は大きくなるであろう。そこで、温度 T の場合と同じようにして、速度 $\vec{u}$ の x 成分 u に関して、粘性の効果は $\mu\nabla^2 u$ と書くことができる。 y 成分、 z 成分についても同じように考えれば、3次元の運動に関する粘性の効果は $\mu\nabla^2 \vec{u}$ と書くことができる。 μ を粘性率と呼ぶことがある。

1. 3 運動方程式

ニュートン力学の第 2 法則より、流体の運動量の時間変化は流体にはたらく力の和に等しいから、

$$\rho \frac{D}{Dt} \vec{u} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (2)$$

となる。両辺を ρ で割って、粘性係数 $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ とすると、

$$\frac{D}{Dt} \vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (3)$$

この方程式は**ナビエ・ストークスの方程式**(Navier-Stokes equations)と呼ばれ、流体力学における運動方程式である。

問 1.1 水が $+x$ の方向に 5 m/s で流れている。上流 ($-x$ の方向) のほうが高温であり、温度勾配 $\frac{\partial}{\partial x}T$ は -0.2 K/m である。水じたいが加熱、冷却されることなく、断熱的であるとする。また、 y 方向、 z 方向には温度は一様である。このとき、 $\frac{D}{Dt}T$ 、 $\vec{u} \cdot \nabla T$ 、 $\frac{\partial}{\partial t}T$ の値をそれぞれ求めよ。

課題 1.1 式(3)において、 $\vec{u} = \vec{0}$ で時間変化しないと仮定して、 $\frac{\partial p}{\partial z}$ を求めよ。ただし、 $\vec{g} = (0, 0, -g)$ とする。 $\vec{u} = \vec{0}$ を仮定したことにより、 $\vec{u}$ のラグランジュ微分

と粘性項を消去できることに注意せよ。

- この関係を**静水圧平衡**(hydrostatic balance)といい、鉛直方向の気圧傾度力と重力がつりあった状態を表している。

問 1.2 課題 1.1 の結果を用いて、地上付近で 10 m 上方へ移動したとき気圧が何 hPa 低下するか計算せよ。ただし空気の密度は 1.2 kg/m^3 とする。また、重力加速度 g は $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ とする。