

地球物理学（2019 年度春学期）（流体地球物理学分野）
最終テスト

注意：計算問題においては計算過程も示すこと。

1. 黒潮のような暖流は、特に冬季においては大気を強く加熱する効果を持つ。このことは、逆に海水が大気によって冷却されていることを意味する。ある海域において、固定された観測点 A で海面付近の水温を観測したところ、水温は時間変化せず一定であった。一方、この海域では、1 m/s の海流が観測された。また、観測点 A 周辺の海面付近の水温の水平分布を調べたところ、上流から下流に向かって 100 km につき 0.2 K の割合で水温が低下していた。この海域での水温の水平勾配 ∇T や流速ベクトル $\vec{u}$ は一様であり、また、鉛直流はゼロであるとして、以下の問いに答えよ。解答は、国際単位系（たとえば、長さの単位は m である）にしたがうこと。

（1）は結果のみを記せばよい。

（1）観測点 A における水温 T のオイラー微分 $\frac{\partial}{\partial t} T$ の値を答えよ。

（2）観測点 A における $\vec{u} \bullet \nabla T$ の値を計算し、有効数字 1 けたで答えよ。符号に注意すること。

（3）以上の小問の結果を用いて、観測点 A における水温 T のラグランジュ微分 $\frac{D}{Dt} T$ の値を求め、有効数字 1 けたで答えよ。符号に注意すること。

2. 大気の運動エネルギーについて、以下の問いに答えよ。

地面との摩擦が効かない自由大気では、気圧座標（ p 座標）における運動方程式の x 成分（東西成分）と y 成分（南北成分）はそれぞれ、次のように書ける。

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (2)$$

ただし、 u は東西風、 v は南北風、 Φ はジオポテンシャルである。また、 f はコリオリ係数（ $f > 0$ ）で一定の値をとる。以下、鉛直流はゼロとし、特定の等圧面内で大気の運動を考える。

(1) 一般にスカラーの物理量 $a = a(x, y, t)$ について、

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{a^2}{2}\right) = a \frac{D}{Dt}a \quad (3)$$

が成り立つ。①、②より、運動エネルギー $K = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ のラグランジュ微分

$$\frac{D}{Dt}K = \frac{D}{Dt}\left(\frac{u^2 + v^2}{2}\right) = u \frac{D}{Dt}u + v \frac{D}{Dt}v \quad (4)$$

を計算し、時間微分を含まない形で表せ。ただし、 ∇ を用いて

$$u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \vec{u} \bullet \nabla \Phi \quad (5)$$

と表してよい。

(2) 地面との摩擦などの外力を考慮し、運動方程式を次のように書く。

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} - ru \quad (6)$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - rv \quad (7)$$

ただし、 r は正の定数である。このとき、運動エネルギーのラグランジュ微分 $\frac{D}{Dt}K$ を計算し、 $\vec{u} \bullet \nabla \Phi$ 、 K 、 r を用いて表せ。

ヒント：質点の運動の速さが 0.9 倍になると、運動エネルギーは 0.81 倍になる。

3. 連続の式について、以下の問いに答えよ。

気圧座標（ p 座標）において、連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad \text{①}$$

と書ける。ただし、 u 、 v 、 ω は風速の x 成分（東西成分）、 y 成分（南北成分）、 p 成分である。

（1）ある観測点では現在の地表面気圧が 1000.00 hPa であり、1 時間に 0.72 hPa の割合で低下している。観測点においては地表付近の水平風速はゼロとする。地表面における ω の値 ω_s を求めよ。単位は Pa/s（hPa ではなく Pa、/h ではなく /s である点に注意せよ）、有効数字 2 けたで答えよ。符号にも注意すること。

ヒント：地上付近の空気は、現在は 1000.00 hPa 面に存在しているが、1 時間後には 999.28 hPa 面に移動する。この移動が、風速の p 成分 ω に対応する。

（2）200 hPa 面で $\omega = 0$ である。200 hPa 面から 1000 hPa 面まで水平発散 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ の値が一定であるという仮定のもとで、この範囲での水平発散の値を求めよ。解答は、国際単位系（たとえば、時間の単位は s である）にしたがい、有効数字 2 けたまで示すこと。

ヒント：①を p について $p_1 = 200$ hPa から $p_2 = 1000$ hPa まで積分せよ。

4. 温度風の関係について、以下の問いに答えよ。

地面との摩擦が効かない自由大気では、気圧座標（ p 座標）における運動方程式の y 成分（南北成分）は

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

と書ける。ここで南北風 v は時間、場所によらずゼロであると仮定すると、

$$0 = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (1)$$

が得られる。一方、静水圧平衡の関係は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha$$

であって、理想気体の状態方程式は

$$p\alpha = RT \quad (2)$$

であるから、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p} \quad (3)$$

が成り立つ。ただし、 u 、 v は風速の x 成分（東西成分）、 y 成分（南北成分）、 Φ はジオポテンシャル、 T は温度、 α は比容（密度の逆数）である。また、 R は気体定数、 f はコリオリ係数（ $f > 0$ ）であり、いずれも一定の値をとる。

(1) ①、③を用いて、東西風の鉛直シア（圧力微分） $\frac{\partial u}{\partial p}$ を R 、 f 、 p 、 $\frac{\partial T}{\partial y}$ で表せ。

ヒント：①の両辺を p で、③の両辺を y で偏微分せよ。

(2) $\Phi = gz$ であることを考慮すると、静水圧平衡の関係は

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{g}{\alpha} \quad (4)$$

と書ける。ただし、 g は重力加速度、 z は高度である。(1)の結果と④から $\frac{\partial u}{\partial z}$ を求め、さらに②を使って、 $\frac{\partial u}{\partial z}$ を g 、 f 、 T 、 $\frac{\partial T}{\partial y}$ で表せ。

(3) (2)の結果を用いると、高層気象観測によって得られた $\frac{\partial u}{\partial z}$ の値から、 $\frac{\partial T}{\partial y}$ を求めることができる。北半球中緯度のある観測点では500 hPa面において、 $\frac{\partial u}{\partial z} = 5.0 \times 10^{-3} \text{ /s}$ 、 $T = 2.6 \times 10^2 \text{ K}$ であった。このとき、 $\frac{\partial T}{\partial y}$ を求めよ。ただし、 $f = 1.0 \times 10^{-4} \text{ /s}$ 、 $g = 1.0 \times 10 \text{ m/s}^2$ とする。解答は、国際単位系（たとえば、長さの単位はmである）にしたがい、有効数字2けたまで示すこと。符号にも注意すること。