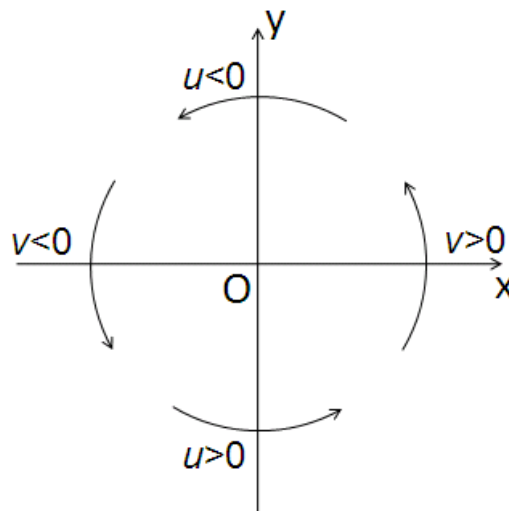


7 渦度方程式

総観規模あるいは全球規模の大気の運動を考える。このような大きな空間スケールでの大気の運動においては、鉛直方向の運動よりも水平方向の運動のほうがずっと大きい。しかも、水平方向の運動の中でも、収束、発散成分は相対的に小さく、低気圧や高気圧などで見られるような渦、つまり回転成分のほうが卓越している。そこで、回転成分に着目して大気の運動を論じる。

7. 1 渦度

大気の回転成分を定量化する方法を考えてみる。図のような反時計回りに回転する渦を考えてみる。南北風に注目すると、西(図の左)のほうでは北風($v < 0$)になっているが、東のほうでは南風($v > 0$)になっている。これを偏微分で表すと $\frac{\partial v}{\partial x} > 0$ となる。また、東西風に注目すると、南(図の下)のほうでは西風($u > 0$)になっているが、北のほうでは東風($u < 0$)になっている。偏微分で表せば、 $\frac{\partial u}{\partial y} < 0$ となる。



渦と渦度

このように考えると、 $\frac{\partial v}{\partial x}$ と $-\frac{\partial u}{\partial y}$ は反時計回りの回転の度合いを表しているともみなすことができそうである。そこで、

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

を**渦度(vorticity)**と定義することにする。以下では、この点に留意しながら、プリミティブ方程式系における運動方程式の y 成分 (v の時間変化についての式)

の x 微分や、 x 成分 (u の時間変化についての式) の y 微分を計算し、渦度についての方程式を導いてみる。

7. 2 渦度方程式

プリミティブ方程式系を用いて、大気の運動の回転成分を考える。第 6 章の(1)、(2)より、

$$\frac{\partial}{\partial t}u + u \frac{\partial}{\partial x}u + v \frac{\partial}{\partial y}u + \omega \frac{\partial}{\partial p}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + F_x \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v + u \frac{\partial}{\partial x}v + v \frac{\partial}{\partial y}v + \omega \frac{\partial}{\partial p}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} + F_y \quad (2)$$

(1)を y で偏微分し、(2)を x で偏微分すると、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \omega \frac{\partial}{\partial p} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} \\ &= f \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{df}{dy} v - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Phi + \frac{\partial}{\partial y} F_x \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \omega \frac{\partial}{\partial p} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} \\ &= -f \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Phi + \frac{\partial}{\partial x} F_y \end{aligned} \quad (4)$$

(4)−(3)より、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \omega \frac{\partial}{\partial p} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} \right) \\ &= -f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{df}{dy} v + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、渦度 (**相対渦度**(relative vorticity)) ξ を

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (6)$$

と定義し、さらに、

$$\beta = \frac{df}{dy} \quad (7)$$

とすると、

$$\frac{D}{Dt} \xi + \beta v = -(f + \xi) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} \right) + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \quad (8)$$

(8)の左辺第 2 項はベータ項とよばれ、**惑星渦度**(planetary vorticity)の南北移流

の効果を表している。右辺第 1 項は**発散項**(divergent term)である。 $(f + \xi)$ は惑星渦度と相対渦度の和であり、**絶対渦度**(absolute vorticity)とよばれる。

$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$ は水平発散である。右辺第 2 項は傾斜項である。全球規模、総観規模では、この項の寄与は小さく無視できる。右辺第 3 項は粘性項である。(8)で傾斜項と粘性項を無視すると、

$$\frac{D}{Dt} \xi + \beta v = -(f + \xi) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (9)$$

となる。このように渦度の時間変化を記述した方程式を**渦度方程式**(vorticity equation)という。

7. 3 非発散の渦度方程式

中高緯度での総観規模の大気の運動においては水平風の発散成分は回転成分より小さいが、より大きな空間スケールである全球規模では、この傾向はますます顕著になる。そこで、渦度方程式(9)において、水平風が発散成分を含まない、つまり、 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ と仮定する。このとき、水平風 (u, v) は**流線関数**(stream function) Ψ を用いて、

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (10)$$

と表すことができ、相対渦度 ξ は、

$$\xi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi \quad (11)$$

と書ける。実際に、(10)で定義された (u, v) は常に $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ をみたしている。

したがって、(9)は

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi + \beta \frac{\partial}{\partial x} \Psi = 0 \quad (12)$$

と表せる。流線関数 Ψ の等値線は、**流線**(streamline) (接線が流速ベクトルと平行になっているような曲線)と一致する。このように非発散という条件のもとで導かれた渦度方程式を**非発散順圧渦度方程式**(non-divergent barotropic vorticity equation)または**非発散渦度方程式**(non-divergent vorticity equation)という。

中緯度の対流圏では西風が卓越する。そこで、南北風がなく、西風が定常かつ一様に吹いている基本場を仮定し、このような基本場の中で微小なじょう乱を考えてみる。流線関数 Ψ は、基本場についての流線関数 Ψ_0 とじょう乱場についての流線関数 Ψ' に分けて、 $\Psi = \Psi_0 + \Psi'$ と書くことができる。同様に、 $u = U + u'$ 、 $v = v'$ とする。このとき、(12)は、

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (U + u') \frac{\partial}{\partial x} + v' \frac{\partial}{\partial y} \right\} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\Psi_0 + \Psi') + \beta \frac{\partial}{\partial x} (\Psi_0 + \Psi') = 0 \quad (13)$$

と書ける。基本場には南北風はないので Ψ_0 は y のみの関数である。また、東西風 $U = -\frac{d}{dy} \Psi_0$ は南北方向には変化しないから $\frac{d^2}{dy^2} \Psi_0 = 0$ である。したがって、(13)は、

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (U + u') \frac{\partial}{\partial x} + v' \frac{\partial}{\partial y} \right\} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi' + \beta \frac{\partial}{\partial x} \Psi' = 0 \quad (14)$$

となる。ここで、微小振幅であることを考慮して、微小量どうしの積を無視すると、(14)は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi' + \beta \frac{\partial}{\partial x} \Psi' = 0 \quad (15)$$

と書ける。

7. 4 定常ロスビー波

水平風が鉛直風より卓越し、かつ水平風の発散成分が非常に小さい、中高緯度での全球規模の大気の運動は、(15)をみたすことが期待される。以下では、どのような型のじょう乱が(15)をみたすか考える。(15)において、波型の解を仮定して、

$$\Psi' = \text{Re } \hat{\Psi} \exp[i(kx + ly - \omega t)] \quad (16)$$

とおく。ただし、 $\hat{\Psi}$ は定数(複素数)であり、 ω は**角振動数**(angular frequency)、 k は**東西波数**(zonal wavenumber)、 l は**南北波数**(meridional wavenumber)である。 ω と k 、 l との関係を求めるために、(16)を(15)に代入すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left\{ \hat{\Psi} \exp[i(kx + ly - \omega t)] \right\} + \beta \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \hat{\Psi} \exp[i(kx + ly - \omega t)] \right\} = 0 \quad (17)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \{ \hat{\Psi} \exp[i(kx + ly - \omega t)] \} &= -i\omega \hat{\Psi} \exp[i(kx + ly - \omega t)] \\
\frac{\partial}{\partial x} \{ \hat{\Psi} \exp[i(kx + ly - \omega t)] \} &= ik \hat{\Psi} \exp[i(kx + ly - \omega t)] \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ \hat{\Psi} \exp[i(kx + ly - \omega t)] \} &= -k^2 \hat{\Psi} \exp[i(kx + ly - \omega t)] \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2} \{ \hat{\Psi} \exp[i(kx + ly - \omega t)] \} &= -l^2 \hat{\Psi} \exp[i(kx + ly - \omega t)]
\end{aligned}$$

が成り立つから、(17)において、 $\frac{\partial}{\partial t}$ は $-i\omega$ に、 $\frac{\partial}{\partial x}$ は ik に、 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ は $-k^2$ に、 $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ は $-l^2$ に置きかえることができ、

$$(-i\omega + ikU)(-k^2 - l^2) \hat{\Psi} \exp[i(kx + ly - \omega t)] + ik\beta \hat{\Psi} \exp[i(kx + ly - \omega t)] = 0 \quad (18)$$

と表せる。したがって、

$$\begin{aligned}
(-i\omega + ikU)(-k^2 - l^2) + ik\beta &= 0 \\
(\omega - Uk)(k^2 + l^2) + \beta k &= 0
\end{aligned} \quad (19)$$

つまり、

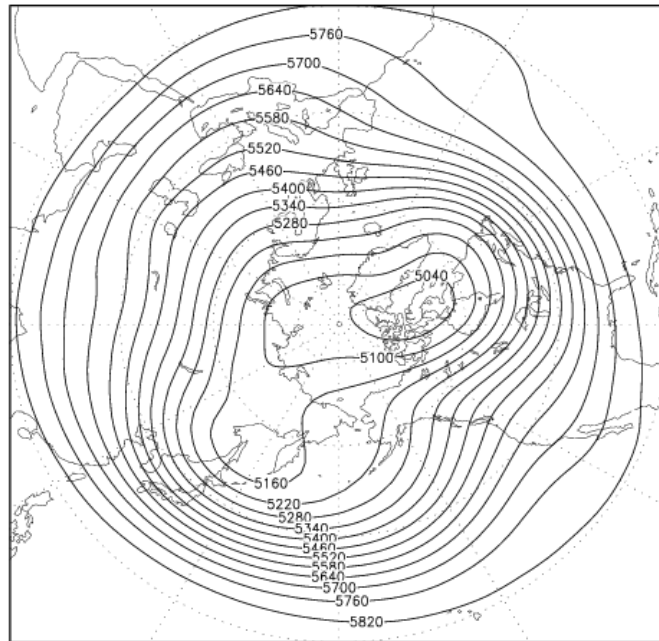
$$\omega = Uk - \frac{\beta k}{k^2 + l^2} \quad (20)$$

が得られる。このように、波動の角振動数を波数の関数として表した式を、**分散関係式**(dispersion relationship)という。定常解、つまり位相速度 $\frac{\omega}{k}$ がゼロである解を考えて、 $\frac{\omega}{k} = 0$ とすると、

$$k^2 + l^2 = \frac{\beta}{U} \quad (21)$$

となる。これが**定常ロスビー波**(stationary Rossby wave)の分散関係式である。 $K = \sqrt{k^2 + l^2}$ を全波数といい、波長は $\lambda = \frac{2\pi}{K}$ で求められる。

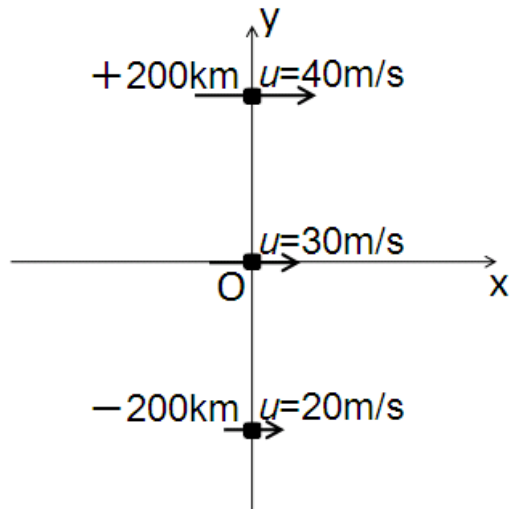
全球規模の大気の運動を傾圧不安定波の時間スケールよりもじゅうぶんに長い時間で時間平均すると、定常ロスビー波を検出することができる。次の図の例では、偏西風が南北に蛇行しながら吹いていることがわかる。



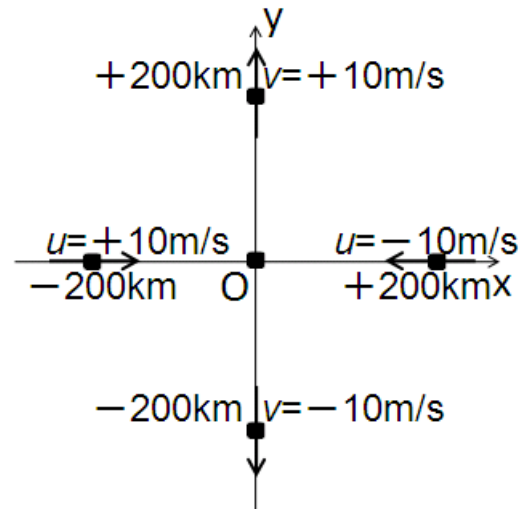
NCEP/NCAR の客観解析データを用いて作成
定常ロスビー波の例（1月の月平均 500hPa 高度場 [m]）

問 7.1 次のような風の場合において、渦度を計算せよ。

(1)



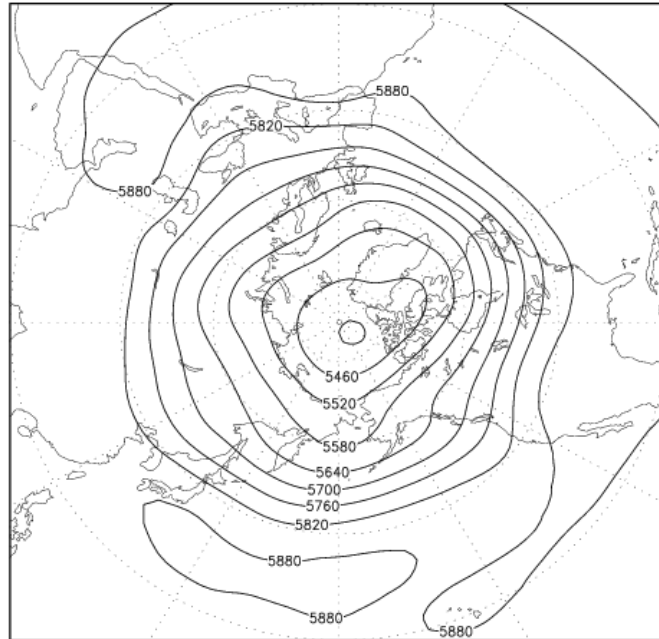
(2)



課題 7.1 式(12)から(15)を導出するときに、基本場の東西風 U を一様とは仮定しないで、南北方向の変化を考慮に入れたら、式(15)はどのように書き換えられるか。ただし、東西方向には一様とする。基本場の南北風はゼロとしてよい。

問 7.2 基本場の西風を 35 m/s として、北緯 45 度における定常ロスビー波の波長を求めよ。地球の自転角速度は $\Omega = 7.3 \times 10^{-5} / \text{s}$ 、地球の半径は $R_e = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ とする。式(21)を用いてよい。

問 7.3 次の図のように、夏季には定常ロスビー波の波数が大きく（波長が小さく）なっている。これはなぜか。定常ロスビー波の分散関係式を用いて、夏季においては西風が弱くなっていることと関連づけて説明せよ。



NCEP/NCAR の客観解析データを用いて作成
定常ロスビー波の例（8月の月平均 500hPa 高度場 [m]）