地球物理学（2018 年度春学期）（流体地球物理学分野）
最終テスト

注意：計算問題においては計算過程も示すこと。

１．ある平野を 10 m/s の風が一様に吹いている。この平野には A、B の２つの測定点があり、地上気温を測定している。ある時刻に、観測点 A で測定された気温は 25.0 ℃であった。同じ時刻に 10 km 風上に位置する観測点 B で測定された気温は 24.2 ℃であった。また、観測点 A、B とも気温は 10 分間に 0.3 K の割合で低下している。この平野での地上気温 T の水平勾配 ∇T は一様であるとして、以下の問いに答えよ。解答は、国際単位系（たとえば、温度の単位は K、時間の単位は s である）にしたがうこと。

（１）観測点 A における気温 T のオイラー微分 $\dfrac{\partial}{\partial t}T$ の値を求め、<u>有効数字１けた</u>で答えよ。符号に注意して解答せよ。

（２）水平風ベクトルを $\vec{u}$ としたとき、$\vec{u} \bullet \nabla T$ の値を計算し、<u>有効数字１けた</u>で答えよ。

（３）以上の小問の結果を用いて、気温 T のラグランジュ微分 $\dfrac{D}{Dt}T$ の値を求め、<u>有効数字１けた</u>で答えよ。

（余白）

２．プリミティブ方程式系の運動方程式を応用して、渦度に関する以下の問いに答えよ。

気圧座標（p 座標）における運動方程式の x 成分（東西成分）と y 成分（南北成分）は次のように書ける。

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + F_x$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} + F_y$$

ただし、u、v、Φ は、それぞれ東西風、南北風、ジオポテンシャルである。F_x、F_y は粘性の効果を表すが、以下では無視する。また、f はコリオリ係数であり、時間、場所によらず正の一定値をとる。ここで、運動量の移流の効果は無視できると仮定して、ラグランジュ微分をオイラー微分に置き換える。このとき、上記の運動方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad ①$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \qquad ②$$

と書ける。

（１）①の両辺を y で偏微分せよ。定数 f は微分演算子の前に出して記せ。

（２）②の両辺を x で偏微分せよ。定数 f は微分演算子の前に出して記せ。

（３）（１）、（２）で得られた２つの方程式の差を計算することによって、渦度 $\overset{\text{グザイ}}{\xi} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ の時間微分 $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ を求め、f、$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial v}{\partial y}$ で表せ。

（４）コリオリ係数 f が定数ではなく、$f = f_0 + \beta y$（ただし f_0 と β は定数）と表わされるとき、①、②は

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \left(f_0 + \beta y\right)v - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad ①'$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v = -\left(f_0 + \beta y\right)u - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \qquad ②'$$

と書き替えられる。①'、②' より、渦度 ξ の時間微分 $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ を求め、$f_0 + \beta y$ 、$\frac{\partial u}{\partial x}$ 、$\frac{\partial v}{\partial y}$ 、βv で表せ。

ヒント：$\left(f_0 + \beta y\right)u$ を x で偏微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(f_0 + \beta y\right)u\right\} = \left(f_0 + \beta y\right)\frac{\partial u}{\partial x}$$

であるが、$\left(f_0 + \beta y\right)v$ を y で偏微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left(f_0 + \beta y\right)v\right\} = \left(f_0 + \beta y\right)\frac{\partial v}{\partial y} + \beta v$$

である。

３．熱力学方程式と、乾燥断熱減率、温位について、以下の問いに答えよ。

乾燥空気に関して、熱力学の第１法則は、次のように書ける。

$$d'Q = C_v dT + p d\alpha$$

ただし、T、p、α は、それぞれ温度、圧力、比容（密度の逆数）であり、すべて正の値をとる。また、C_v は定積比熱（$C_v > 0$）であり、一定値をとる。したがって、断熱（$d'Q = 0$）という条件のもとでは、

$$C_v dT + p d\alpha = 0 \qquad ①$$

が成り立つ。一方、乾燥空気を理想気体とみなせば、状態方程式は、

$$p\alpha = RT \qquad ②$$

と書ける。ただし、R は気体定数（$R > 0$）であり、一定値をとる。②の両辺を微分すると、

$$p d\alpha + \alpha dp = RdT$$

が得られる。これを①に代入すると、

$$C_v dT + RdT - \alpha dp = 0$$

$$C_p dT - \alpha dp = 0 \qquad ③$$

となる。ただし、C_p は定圧比熱であり、$C_p = C_v + R$ である。

（１）③より、$\dfrac{dT}{dp}$ を C_p と密度 ρ で表せ。ここで得られた解答は、気圧座標（p 座標）で表した乾燥断熱減率である。

（２）静水圧平衡より、

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \qquad ④$$

が成り立つ。ただし、g は重力加速度である。（１）の結果と④を用いて、$\dfrac{dT}{dz}$ を C_p と g で表せ。符号に注意して解答せよ。

（3）物理量θをTとpの関数として

$$\theta = T\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\kappa} \tag{⑤}$$

と定義する。ただし、κは定数である。また、p_0は基準となる圧力であり、これも定数である。このとき、θの微分$d\theta$は

$$d\theta = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\kappa} dT + \frac{T\kappa}{p}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\kappa} dp = \theta\left(\frac{1}{T}dT + \frac{\kappa}{p}dp\right) \tag{⑥}$$

と書ける。一方、②と③より、断熱という条件のもとでは、

$$C_p dT - \frac{RT}{p}dp = 0 \tag{⑦}$$

が成り立つ。⑥と⑦を比べることによって、断熱という条件のもとで物理量θが保存量になるようにκの値を定め、C_pとRで表せ。符号に注意して解答せよ。