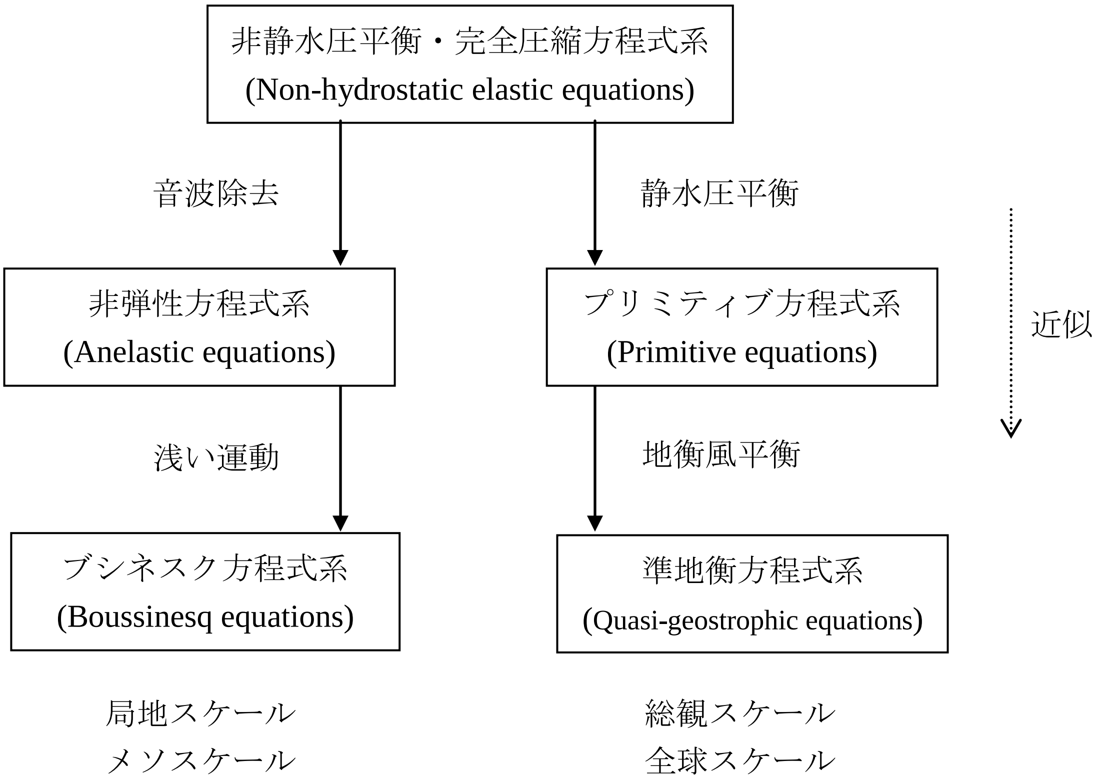
地球物理学（流体地球物理学分野）

（2018年度春学期）

目次

0　気象学で用いる方程式系

　気象学においては、大気の運動を記述するために、流体力学に基づいた、いくつかの方程式系が用いられる。



　この授業の前半では、流体力学の考えかたの基礎を習得するとともに、温帯低気圧のような比較的大きな空間スケールの現象を扱うために用いられる、プリミティブ方程式系を中心に学ぶ。後半では、プリミティブ方程式系から準地衡方程式系を導出し、温帯低気圧の発達の仕組みである傾圧不安定について学習する。

１　ナビエ・ストークスの方程式

温度の高い水が上流から流れてくる状況を考えてみる。固定した観測点にいる観測者からみると、 「水温の高い水が流れてくるので水温が上昇する」 と考えられる。一方、水流に乗って測定している観測者からみると、 「水温は時間変化しない」 と考えることができる。流体の運動を考えるときには、このような２種類の時間変化を区別して取り扱う必要がある。

１．１　オイラー微分とラグランジュ微分

はじめに、あるスカラーの物理量$a(x,y,z,t)$の時間微分を考えてみる。流体力学においては、**オイラー微分**（**局所微分**）(Eulerian derivative)と**ラグランジュ微分**（**物質微分**）(Lagrangian derivative)という２種類の時間微分があり、両者を区別する必要がある。オイラー微分とは、空間のある一点にとどまって観測した時間変化である。スカラーの物理量$a(x,y,z,t)$のオイラー微分は、偏微分を用いて、$\frac{\partial}{\partial t}a$と表わされる。

一方、ラグランジュ微分とは、流体の流れに乗って移動しながら観測した時間変化である。流れに乗って移動する観測者が、ある時刻tに(x,y,z)にいるとする。流速を$\vec{u}=(u,v,w)$とすると、微小な時間δt経過後には、観測者は$(x+u\delta t, y+v\delta t, z+w\delta t)$にいる。ゆえに、この観測者が観測する物理量$a(x,y,z,t)$は微小な時間$\delta t$経過後には、$a(x+u\delta t, y+v\delta t, z+w\delta t, t+\delta t)$に変化している。したがって、物理量$a(x,y,z,t)$のラグランジュ微分は、

$$\frac{\partial}{\partial t}a+u\frac{\partial}{\partial x}a+v\frac{\partial}{\partial y}a+w\frac{\partial}{\partial z}a=\frac{\partial}{\partial t}a+\vec{u}\bullet\nabla a$$

である。流体力学ではラグランジュ微分を

$$\frac{D}{Dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}\bullet\nabla \tag{1}$$

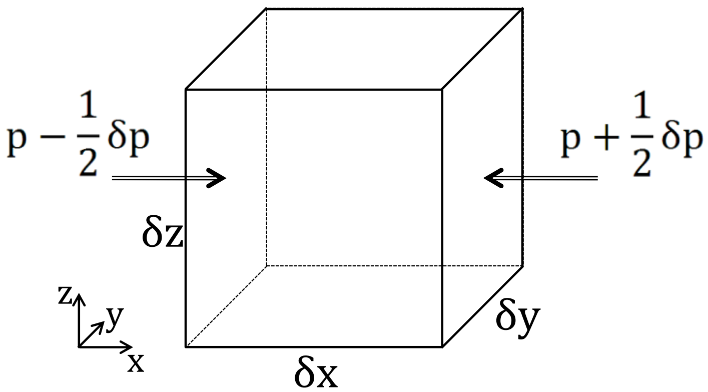
と定義する。たとえば、物理量$a(x,y,z,t)$のラグランジュ微分は$\frac{D}{Dt}a$と表される。オイラー微分とラグランジュ微分の違いは、$\vec{u}\bullet\nabla$という項の有無である。$\vec{u}\bullet\nabla$は移流項とよばれ、移流の効果を表している。

大気のような流体が運動するのは、流体に力がはたらくからである。流体にはたらく力として、重力、気圧傾度力、粘性の３つを取り上げて、方程式でどのように表現できるか考える。

１．２　流体にはたらく力

ここでは、微小な体積$\delta x\delta y\delta z$の流体にはたらく力を考える。まず、**重力**(gravity force)は質量$\rho\delta x\delta y\delta z$に重力加速度ベクトル$\vec{g}$をかけたものであるから$\rho\vec{g}\delta x\delta y\delta z$と書ける。したがって、単位体積あたりにはたらく重力は$\rho\vec{g}$である。

次に、**気圧傾度力**(pressure gradient force)を考える。気圧傾度力は、気圧勾配によって生じる力である。気圧（圧力）とは、流体の境界面に対して垂直にはたらく、単位面積あたりの力の大きさである。圧力は、$-x$方向の境界面に対しては$+x$方向に、$+x$方向の境界面に対しては$-x$方向にはたらく。ここで圧力pがx方向に一様であれば、流体にはたらく正味のx方向の力はゼロである。しかし、pがx方向に変化していれば、流体に正味の力がはたらく。



3次元空間の中で固定された微小な領域$\delta x\delta y\delta z$において、$+x$方向の境界面での圧力を$p+\frac{1}{2}\delta p$、$-x$方向の境界面での圧力を$p-\frac{1}{2}\delta p$とする。境界面の面積は$\delta y\delta z$だから、$+x$方向の境界面にはたらく力は$-\left(p+\frac{1}{2}\delta p\right)\delta y\delta z$、$-x$方向の境界面にはたらく力は$\left(p-\frac{1}{2}\delta p\right)\delta y\delta z$である。両者の和を計算すると、

$$-\left(p+\frac{1}{2}\delta p\right)\delta y\delta z+\left(p-\frac{1}{2}\delta p\right)\delta y\delta z=-\delta p\delta y\delta z$$

となる。これを体積$\delta x\delta y\delta z$で割ると、$-\frac{\delta p\delta y\delta z}{\delta x\delta y\delta z}=-\frac{\delta p}{\delta x}$となる。これが単位体積あたりにはたらく気圧傾度力のx成分である。微小な体積を考えているので、微

分を用いて、気圧傾度力の x 成分を $-\frac{\partial}{\partial x}p$ と書くことができる。y 方向、z 方向も考慮すれば、気圧傾度力は $-\nabla p$ となる。

さらに、**粘性**(viscosity)の効果を考える。粘性とは運動量の拡散（平滑化）である。熱伝導方程式において熱拡散の効果は $k\nabla^2 T$ と書かれた。これは、ある場所の温度に比べて周囲の温度のほうが高いとき、その場所の温度が上昇することを表している。運動量についても同様に考えることができる。たとえば、ある場所における x 方向の速度 u に比べて周囲の速度のほうが大きいとき、粘性の効果によって、その場所の速度 u は大きくなるであろう。そこで、温度 T の場合と同じようにして、速度 $\vec{u}$ の x 成分 u に関して、粘性の効果を $\mu\nabla^2 u$ と書くことができる。y 成分、z 成分についても同じように考えれば、3 次元の運動に関する粘性の効果は $\mu\nabla^2\vec{u}$ と書くことができる。μ を粘性率と呼ぶことがある。

１．３　運動方程式

ニュートン力学の第 2 法則より、流体の運動量の時間変化は流体にはたらく力の和に等しいから、

$$\rho\frac{D}{Dt}\vec{u} = \rho\vec{g} - \nabla p + \mu\nabla^2\vec{u} \tag{2}$$

となる。両辺を ρ で割って、粘性係数 $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ とすると、

$$\frac{D}{Dt}\vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{u} \tag{3}$$

この方程式は**ナビエ・ストークスの方程式**(Navier-Stokes equations)と呼ばれ、流体力学における運動方程式である。

問 1.1　水が $+x$ の方向に 5 m/s で流れている。上流（$-x$ の方向）のほうが高温であり、温度勾配 $\frac{\partial}{\partial x}T$ は－0.2 K/m である。水じたいが加熱、冷却されることはなく、断熱的であるとする。また、y 方向、z 方向には温度は一様である。このとき、$\frac{D}{Dt}T$ 、$\vec{u}\bullet\nabla T$、$\frac{\partial}{\partial t}T$ の値をそれぞれ求めよ。

課題 1.1　式(3)において、$\vec{u}=\vec{0}$ で時間変化しないと仮定して、$\frac{\partial p}{\partial z}$ を求めよ。ただし、$\vec{g}=(0,0,-g)$ とする。$\vec{u}=\vec{0}$ を仮定したことにより、$\vec{u}$ のラグランジュ微分

と粘性項を消去できることに注意せよ。

- この関係を**静水圧平衡**(hydrostatic balance)といい、鉛直方向の気圧傾度力と重力がつりあった状態を表している。

問 1.2　課題 1.1 の結果を用いて、地上付近で 10 m 上方へ移動したとき気圧が何 hPa 低下するか計算せよ。ただし空気の密度は 1.2 kg/m^3 とする。また、重力加速度 g は $g = 9.8$ m/s^2 とする。