地球物理学（2016 年度春学期）（流体地球物理学分野）
最終テスト

注意：計算問題においては計算過程も示すこと。

１．海上を 10 m/s の北風が吹いている。海上には A、B の２つの測定点があり、海上気温を測定している。ある時刻に、測定点 A で測定された気温は 3.0 ℃であった。同じ時刻に 10 km 北に位置する測定点 B で測定された気温は 2.0 ℃であった。２つの測定点で測定される気温の値に時間変化はみられない。この海域での海上気温 T の水平勾配 ∇T は一様であるとして、以下の問いに答えよ。解答は、国際単位系（たとえば、温度の単位は K、時間の単位は s である）にしたがうこと。また、符号にも注意すること。

（１）測定点 A における気温 T のオイラー微分 $\dfrac{\partial}{\partial t}T$ の値を答えよ。答えのみを記せばよい。

（２）水平風ベクトルを $\vec{u}$ としたとき、$\vec{u} \bullet \nabla T$ の値を計算し、有効数字２けたで答えよ。符号に注意せよ。

（３）以上の小問の結果を用いて、気温 T のラグランジュ微分 $\dfrac{D}{Dt}T$ の値を求め、有効数字２けたで答えよ。

（余白）

２．プリミティブ方程式系の運動方程式を応用して、渦度に関する以下の問いに答えよ。

気圧座標（p 座標）における運動方程式の x 成分（東西成分）と y 成分（南北成分）を次のように書く。

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

ただし、u 、v 、Φ は、それぞれ東西風、南北風、ジオポテンシャルである。 f はコリオリ係数であり、正の定数とする。ここで、運動量の移流の効果は無視できると仮定して、ラグランジュ微分をオイラー微分に置き換える。このとき、上記の運動方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad ①$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \qquad ②$$

と書ける。

（１）①の両辺を y で偏微分せよ。また、②の両辺を x で偏微分せよ。定数は微分演算子の前に出して記せ。

（２）以上の小問で得られた２つの方程式の差を計算することによって、渦度 $\overset{グザイ}{\xi} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ の時間微分 $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ を求め、 f 、$\frac{\partial u}{\partial x}$ 、$\frac{\partial v}{\partial y}$ で表せ。

（３）摩擦の効果を考慮して、①、②を

$$\frac{\partial}{\partial t}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} - ru \qquad ③$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - rv \qquad ④$$

と書きかえる。ここで、r は正の定数であり、右辺第３項が摩擦の効果を表している。（１）と（２）と同様の計算をすることによって、渦度 $\xi = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$ の時間微分 $\dfrac{\partial \xi}{\partial t}$ を求め、f、$\dfrac{\partial u}{\partial x}$、$\dfrac{\partial v}{\partial y}$、$r$、$\xi$ で表せ。ここで解答として得られる方程式は、渦度が水平風の収束・発散や摩擦によって時間変化することを表している。

３. 熱力学方程式と、乾燥断熱減率、温位について、以下の問いに答えよ。

乾燥空気に関して、熱力学の第１法則は、次のように書ける。

$$d'Q = C_v dT + p d\alpha$$

ただし、T 、 p 、 α は、それぞれ温度、圧力、比容（密度の逆数）であり、すべて正の値をとる。また、C_v は定積比熱（$C_v > 0$）であり、一定値をとる。したがって、断熱（$d'Q = 0$）という条件のもとでは、

$$C_v dT + p d\alpha = 0 \quad ①$$

が成り立つ。一方、乾燥空気を理想気体とみなせば、状態方程式は、

$$p\alpha = RT \quad ②$$

と書ける。ただし、R は気体定数（$R > 0$）であり、一定値をとる。②の両辺を微分すると、

$$p d\alpha + \alpha dp = R dT$$

が得られる。これを①に代入すると、

$$C_v dT + R dT - \alpha dp = 0$$

$$C_p dT - \alpha dp = 0 \quad ③$$

となる。ただし、C_p は定圧比熱であり、$C_p = C_v + R$ である。

（1）③より、$\dfrac{dT}{dp}$ を C_p と密度 ρ で表せ。ここで得られた解答は、気圧座標（p 座標）で表した乾燥断熱減率である。

（2）地上付近の環境を想定し、空気の密度 ρ を $\rho = 1.2$ kg/m^3 とする。このとき、p 座標で表した乾燥断熱減率の値を求めよ。ただし、$C_p = 1.0 \times 10^3$ J/kg K とする。解答は、国際単位系（たとえば、圧力の単位は Pa である）にしたがうこと。

参考 : 高度座標（z 座標）で表した乾燥空気の断熱減率は 1.0×10^{-2} K/m 程度である。

（3）物理量θをTとpの関数として

$$\theta = T\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\kappa} \qquad ④$$

と定義する。ただし、κは定数である。また、p_0は基準となる圧力であり、これも定数である。θの微分$d\theta$をκ、θ、T、p、dT、dpで（p_0を含まない形で）表せ。

（4）（3）の結果と③を比べることによって、断熱という条件のもとで、物理量θが保存量になるようにκの値を定め、C_pとRで表せ。符号に注意せよ。