補遺３　連続の式

３．１　連続の式

第 4 章の(2)より、連続の式は、

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \bullet (\rho \vec{u}) = 0 \tag{1}$$

と書ける。左辺第 2 項を成分に分けて書くと、

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \tag{2}$$

となる。積の微分を展開して書けば、

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + u\frac{\partial}{\partial x}\rho + \rho\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial y}\rho + \rho\frac{\partial}{\partial y}v + w\frac{\partial}{\partial z}\rho + \rho\frac{\partial}{\partial z}w = 0 \tag{3}$$

となるので、項の順序を入れ替えて、

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + u\frac{\partial}{\partial x}\rho + v\frac{\partial}{\partial y}\rho + w\frac{\partial}{\partial z}\rho + \rho\frac{\partial}{\partial x}u + \rho\frac{\partial}{\partial y}v + \rho\frac{\partial}{\partial z}w = 0 \tag{4}$$

と表せる。ゆえに、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}\right)\rho + \rho\left(\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v + \frac{\partial}{\partial z}w\right) = 0 \tag{5}$$

となって、

$$\frac{D}{Dt}\rho + \rho\nabla \bullet \vec{u} = 0 \tag{6}$$

が得られる。