補遺２　慣性振動と浮力振動

２．１　慣性振動

慣性系においては、外力が加わらない限り、物体は等速直線運動を続ける。しかし、回転系においては、みかけの力としてのコリオリ力がはたらくため、外力がない場合であっても物体は等速直線運動をするわけではない。ここでは、回転系における運動方程式において、空間的に一様な場を仮定して、水平風の時間変化を導く。第 2 章の(17)、(18)より、回転系における運動方程式の x 成分と y 成分は、それぞれ

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}p + F_x \tag{1}$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}p + F_y \tag{2}$$

と書けた。ここで、空間的に一様な場を仮定することにより、気圧傾度力の項と粘性項を消去できる。さらに、移流項を消去することができるので、$\frac{D}{Dt}u = \frac{d}{dt}u$、$\frac{D}{Dt}v = \frac{d}{dt}v$ である。したがって、

$$\frac{d}{dt}u = fv \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}v = -fu \tag{4}$$

(3)を t で微分して、

$$\frac{d^2}{dt^2}u = f\frac{d}{dt}v \tag{5}$$

(5)の右辺に(4)を代入して、

$$\frac{d^2}{dt^2}u = -f^2u \tag{6}$$

(6)の解は、

$$u = C\sin\left(ft + \theta_0\right) \qquad (C\text{、}\theta_0\text{は定数}) \tag{7}$$

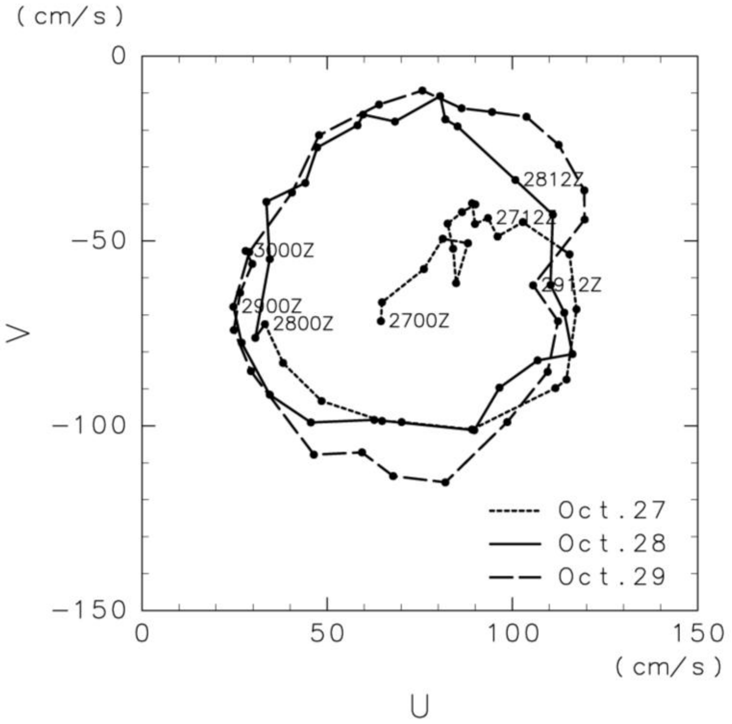
(7)を(3)に代入して、

$$v = C\cos\left(ft + \theta_0\right) \tag{8}$$

(7)、(8)は角振動数が f の円運動を表している。これを**慣性振動**(inertial oscillation)という。

次の図は、台風通過後に、ブイに取り付けられた流速計によって観測された海洋表層の流速の時間変化を表している。流速ベクトルが周期 1 日弱で時計回

りに回転していて、慣性振動が生じていることがわかる。



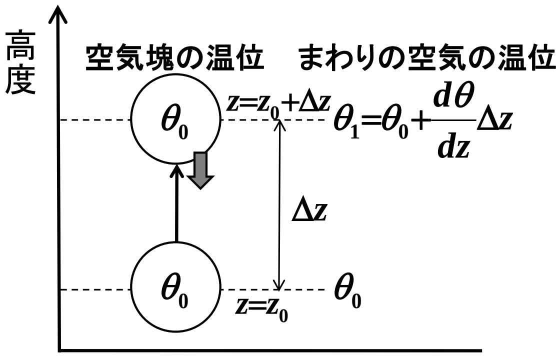
NOAAによる観測データを用いて作成

北緯32度、東経145度で観測された海洋表層の流速の時間変化
（2007年10月27日0時～30日0時、時刻はUTCで表示）

慣性振動は、さまざまなじょう乱が卓越する対流圏では観測されにくいが、成層圏や海洋内部ではこのように明瞭に現れることがある。

２．２　浮力振動

上空に行くほど温位が高い状態は安定成層である。このような条件のもとでは、持ち上げられた空気塊の温度はまわりの空気の温度よりも低いので、空気塊は正味で下向きの力を受けて押し戻される。ここでは、安定成層、つまり $\frac{d\theta}{dz} > 0$ という条件のもとで、空気塊の鉛直方向の運動を考える。



ある高度z_0で温位がθ_0の空気塊を高度$z_0+\Delta z$まで断熱的に持ち上げたとする。断熱という条件のもとでは温位は変化しないから、持ち上げられた空気塊の温位はθ_0である。一方、まわりの空気の温位θ_1は、$\theta_1=\theta_0+\frac{d\theta}{dz}\Delta z$である。持ち上げられた空気塊の密度を$\rho_0$とすると、まわりの空気の密度$\rho_1$は、空気塊の温度を$T_0$、まわりの空気の温度を$T_1$として、

$$\rho_1=\rho_0\frac{T_0}{T_1}=\rho_0\frac{\theta_0}{\theta_1}=\rho_0\frac{\theta_0}{\theta_0+\frac{d\theta}{dz}\Delta z} \tag{9}$$

と表せる。したがって、空気塊の運動方程式は、重力と浮力を考慮して、

$$\rho_0\frac{d^2}{dt^2}\Delta z=-\rho_0 g+\rho_1 g=-\rho_0 g+\rho_0\frac{\theta_0}{\theta_0+\frac{d\theta}{dz}\Delta z}g \tag{10}$$

と書ける。この方程式を変形すると、

$$\rho_0\frac{d^2}{dt^2}\Delta z=-\rho_0 g\frac{\frac{d\theta}{dz}}{\theta_0+\frac{d\theta}{dz}\Delta z}\Delta z \tag{11}$$

となる。$\Delta z\to 0$とすると、$\theta_0+\frac{d\theta}{dz}\Delta z\to\theta_0$である。$\theta_0$をあらためて$\theta$と書いて、

$$\frac{d^2}{dt^2}\Delta z=-\frac{g}{\theta}\frac{d\theta}{dz}\Delta z \tag{12}$$

が得られる。ここで、

$$N^2=\frac{g}{\theta}\frac{d\theta}{dz} \tag{13}$$

とおくと、

$$\frac{d^2}{dt^2}\Delta z=-N^2\Delta z \tag{14}$$

と書くことができる。この方程式は角振動数Nの単振動を表している。この振動を**浮力振動**(buoyancy oscillation)という。また、Nは**ブラント・ヴァイサラ**

振動数(Brant-Vaisala frequency)とよばれる。対流圏ではブラント・ヴァイサラ振動数は$N = 1.0 \times 10^{-2}$ /s程度の値をとることが多い。