

9 傾圧不安定

温帯低気圧は、われわれにとってなじみのある大気現象である。温帯低気圧が発生する仕組みについて、これまでは、暖気と寒気がぶつかりと前線や低気圧ができると考えてきた。ここでは、準地衡方程式系を用いて、温帯低気圧の発生、発達について、理論的な説明を試みる。

9. 1 準地衡渦位の保存

第8章の(49)で、 f と N は一定と仮定して、さらに ρ_R の高度変化を無視すると、

$$\frac{D_g}{Dt} \left\{ f + \nabla^2 \Psi_g + \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi_g \right\} = 0 \quad (1)$$

と書ける。(1)は、準地衡渦位

$$q = f + \nabla^2 \Psi_g + \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi_g \quad (2)$$

が保存することを意味している。また、第8章の(41)を、高度座標で書きかえると、

$$\frac{D_g}{Dt} \left(\frac{f}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \Psi_g \right) = -\frac{N^2}{f} w \quad (3)$$

が得られる。

基本場において、南北風はゼロであり、東西風は東西、南北方向には一様で、鉛直シアは一定であると仮定する。このとき、基本場の地衡流線関数 Ψ_0 は、

$$\Psi_0 = -\frac{\Delta U}{H} yz \quad (4)$$

と書ける。ただし、 H は対象としている領域の高さ、 ΔU は領域の下端と上端での東西風速の差である。

地衡流線関数の基本場からの偏差を Ψ' 、準地衡渦位の偏差を q' とすると、準地衡渦位は保存しなければならないから、時間と場所によらず、

$$q' = \nabla^2 \Psi' + \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi' = 0 \quad (5)$$

である。ここで、

$$\Psi' = \hat{\Psi}(z) \exp[i(kx + ly - \omega t)] \quad (6)$$

として、(5)に代入すると、

$$\frac{d^2}{dz^2} \hat{\Psi} = \frac{N^2(k^2 + l^2)}{f^2} \hat{\Psi} \quad (7)$$

が得られる。(7)を満たす $\hat{\Psi}$ は、

$$\hat{\Psi} = A \cosh\left(\frac{z}{H_R}\right) + B \sinh\left(\frac{z}{H_R}\right) \quad (8)$$

である。ただし、

$$H_R^2 = \frac{f^2}{N^2(k^2 + l^2)} \quad (9)$$

である。

9. 2 境界条件

次に、境界条件を検討する。下端 $z = -H/2$ では、 $w = 0$ である。(3)より、

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \left\{ -\frac{\partial}{\partial y} (\Psi_0 + \Psi') \right\} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \Psi'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right] \left\{ \frac{f}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} (\Psi_0 + \Psi') \right\} = 0 \quad (10)$$

だから、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{f}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \Psi_0 \right) \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{f}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \Psi' \right) + \left(-\frac{\partial \Psi'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \Psi'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{f}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \Psi_0 \right) \\ & + \left(-\frac{\partial \Psi'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \Psi'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{f}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \Psi' \right) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 Ψ_0 の定義より、左辺第1項はゼロである。微小振幅を仮定すると、 $\Psi' \ll \Psi_0$ だから、左辺第2項、第3項に比べて第4項はじゅうぶんに小さい。したがって、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{f}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \Psi' \right) + \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \Psi'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \Psi'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{f}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \Psi_0 \right) = 0 \quad (12)$$

である。(4)を代入すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\Delta U}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} \Psi' \right) - \frac{\Delta U}{H} \frac{\partial}{\partial x} \Psi' = 0 \quad (13)$$

同様に、上端 $z = H/2$ においても、 $w = 0$ だから、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta U}{2} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial z} \Psi'\right) - \frac{\Delta U}{H} \frac{\partial}{\partial x} \Psi' = 0 \quad (14)$$

である。(13)、(14)に(8)を代入すると、

$$\frac{1}{H_R} \left(-\omega - k \frac{\Delta U}{2}\right) (-As + Bc) - k \frac{\Delta U}{H} (Ac - Bs) = 0 \quad (15)$$

$$\frac{1}{H_R} \left(-\omega + k \frac{\Delta U}{2}\right) (As + Bc) - k \frac{\Delta U}{H} (Ac + Bs) = 0 \quad (16)$$

ただし、

$$c = \cosh\left(\frac{H}{2H_R}\right), \quad s = \sinh\left(\frac{H}{2H_R}\right) \quad (17)$$

9. 3 分散関係式

以上の境界条件を用いて分散関係式を導く。(15)と(16)の和と差を計算すると、

$$k\Delta U \left(\frac{1}{2}s - \frac{H_R}{H}c\right) A - \omega c B = 0 \quad (18)$$

$$\omega s A + k\Delta U \left(-\frac{1}{2}c + \frac{H_R}{H}s\right) B = 0 \quad (19)$$

が得られる。(18)、(19)は A と B についての連立 1 次方程式である。この連立 1 次方程式が $A = B = 0$ 以外の解を持つための条件は、

$$\left\{k\Delta U \left(\frac{1}{2}s - \frac{H_R}{H}c\right)\right\} \left\{k\Delta U \left(-\frac{1}{2}c + \frac{H_R}{H}s\right)\right\} - (-\omega c)(\omega s) = 0$$

$$\left\{\frac{H_R}{2H}(c^2 + s^2) - \left(\frac{1}{4} + \frac{H_R^2}{H^2}\right)cs\right\} k^2 \Delta U^2 + cs\omega^2 = 0 \quad (20)$$

である。ゆえに、

$$\omega^2 = k^2 \Delta U^2 \left\{\frac{1}{2} \tanh\left(\frac{H}{2H_R}\right) - \frac{H_R}{H}\right\} \left\{\frac{1}{2} \coth\left(\frac{H}{2H_R}\right) - \frac{H_R}{H}\right\} \quad (21)$$

ここで、

$$K^2 = k^2 + l^2, \quad K_R^2 = \frac{f^2}{N^2 H^2} \quad (22)$$

とおくと、

$$\omega^2 = k^2 \Delta U^2 \left\{ \frac{1}{2} \tanh \left(\frac{K}{2K_R} \right) - \frac{K_R}{K} \right\} \left\{ \frac{1}{2} \coth \left(\frac{K}{2K_R} \right) - \frac{K_R}{K} \right\} \quad (23)$$

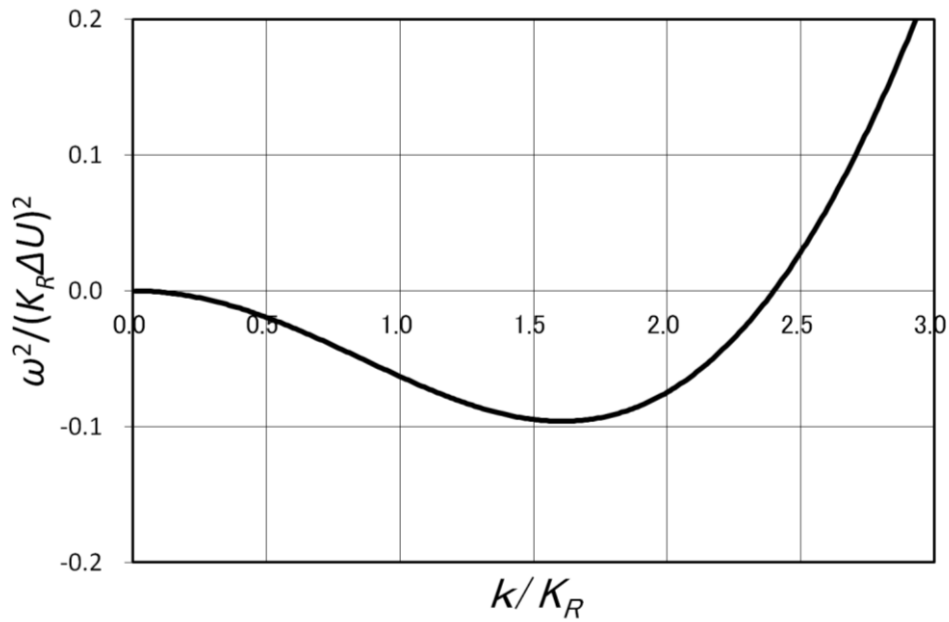
が得られる。(23)は、準地衡方程式系において、上端と下端で鉛直速度がゼロという条件を与えたときに現れる波動の分散関係式である。

9. 4 傾圧不安定波の概形

(23) の分散関係式で表される波動の概形を考える。(23)で、 $l=0$ とすると、

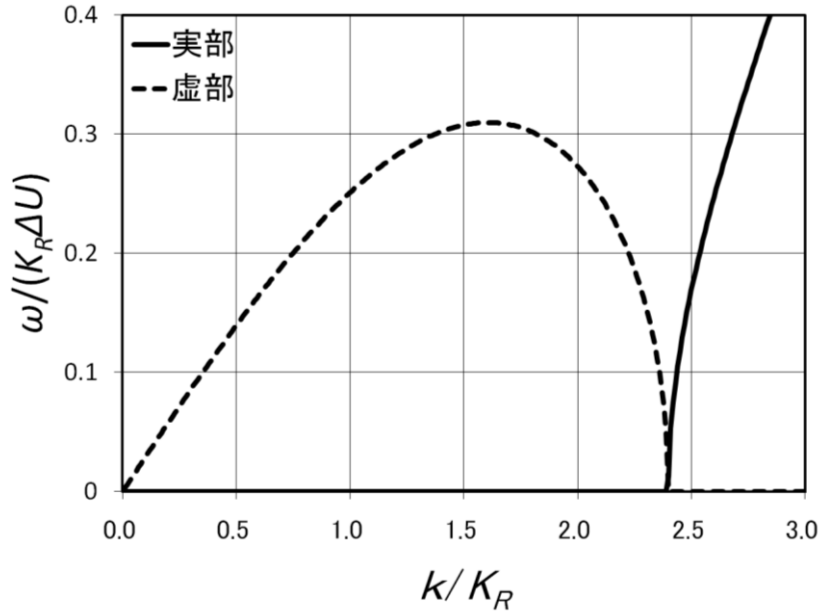
$$\omega^2 = k^2 \Delta U^2 \left\{ \frac{1}{2} \tanh \left(\frac{k}{2K_R} \right) - \frac{K_R}{k} \right\} \left\{ \frac{1}{2} \coth \left(\frac{k}{2K_R} \right) - \frac{K_R}{k} \right\} \quad (24)$$

となる。このとき、波数 k と角振動数 ω の2乗との関係を計算すると、図のようになる。



傾圧不安定波の波数と角振動数との関係

したがって、波数 k と角振動数 ω の実部、虚部との関係は次のようになる。



傾圧不安定波の角振動数と成長率

(24)で、 $k < 2.40K_R$ のときには、 ω^2 が負になる。この場合、 ω が虚数成分を持つので、時間とともに振幅が増大する不安定モードが存在する。このような不安定を**傾圧不安定**(baroclinic instability)とよぶ。成長率 σ は、 $\sigma = -i\omega$ と書くことができる。 σ が最大となるのは、 $k = 1.61K_R$ のときで、最大成長率は、 $\sigma = 0.31K_R \Delta U$ である。現実の中緯度の気では、 $K_R = 10^{-6} / \text{m}$ 程度であるので、成長率が最大になるときの波長は約 4000 km である。これは、現実の気で見られる温帯低気圧の空間スケールとよく一致する。このときの成長率は、 $\Delta U = 30 \text{ m/s}$ とすれば、1.1/day 程度である。

次に、成長モードの構造を調べてみる。(18)、(19)から、 ω を消去すると、

$$\frac{B^2}{A^2} = \frac{\frac{1}{2} \tanh\left(\frac{H}{2H_R}\right) - \frac{H_R}{H}}{\frac{1}{2} \coth\left(\frac{H}{2H_R}\right) - \frac{H_R}{H}} \quad (25)$$

だから、

$$\frac{B^2}{A^2} = \frac{\frac{1}{2} \tanh\left(\frac{K}{2K_R}\right) - \frac{K_R}{K}}{\frac{1}{2} \coth\left(\frac{K}{2K_R}\right) - \frac{K_R}{K}} \quad (26)$$

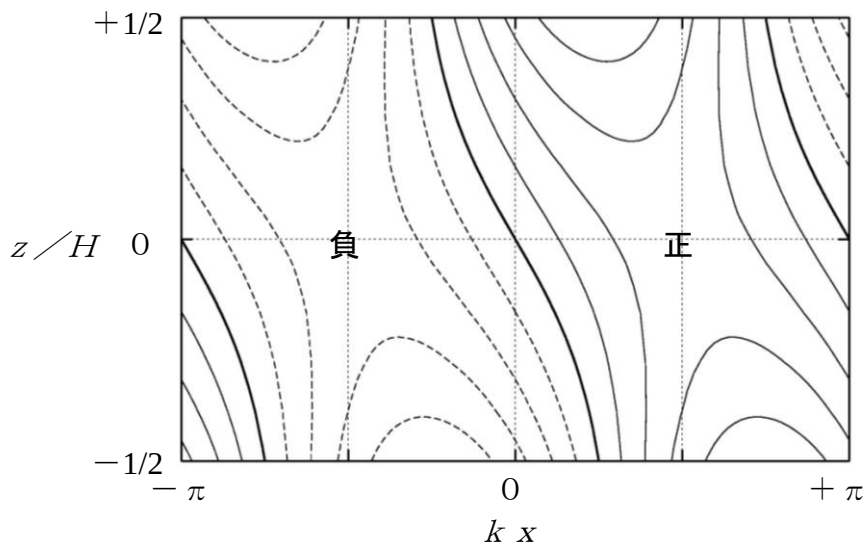
となる。 $l=0$ とすると、

$$\frac{B^2}{A^2} = \frac{\frac{1}{2} \tanh\left(\frac{k}{2K_R}\right) - \frac{K_R}{k}}{\frac{1}{2} \coth\left(\frac{k}{2K_R}\right) - \frac{K_R}{k}} \quad (27)$$

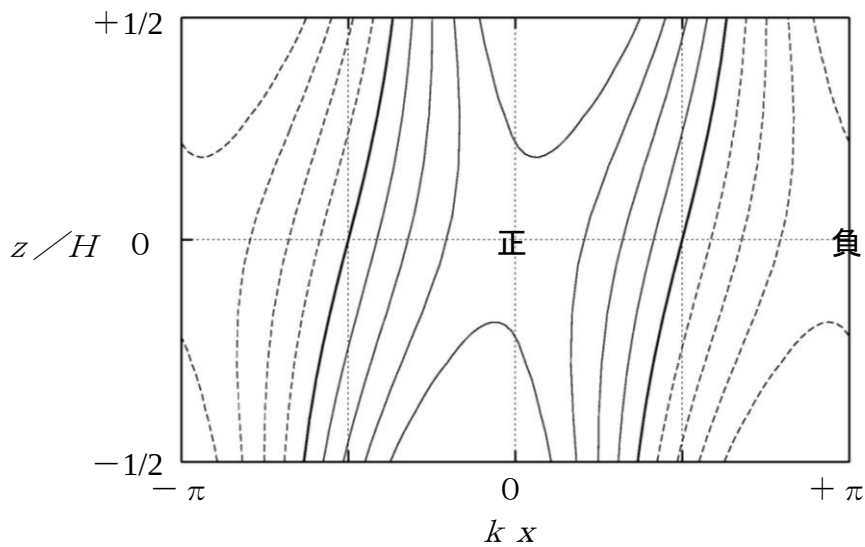
(24)で、 ω^2 が負のときには、 $B^2/A^2 < 0$ だから、 B/A は虚数である。(6)、(8)で表される地衡流線関数は水平方向には波型であるが、 B/A が虚数のときには、位相が高度によって変化する。これは気圧の谷や尾根の軸が直立せず傾くことを意味する。成長率が最大となる $k=1.61K_R$ のとき、 $B/A=1.50i$ である。この値を、(6)、(8)に代入すると、地衡流線関数 Ψ' は、

$$\Psi' = A \exp(\sigma t) \left\{ \cosh\left(\frac{z}{H_R}\right) \cos(kx) - 1.50 \sinh\left(\frac{z}{H_R}\right) \sin(kx) \right\} \quad (28)$$

と書くことができ、次の図のように空間構造を求めることができる。上空に行くほど気圧の谷が西に傾いていることが分かる。 Ψ' の空間構造から、南北風や温度偏差も計算することができ、気圧の谷の前面で暖気移流が生じ高温偏差になっていて、後面で寒気移流が生じ低温偏差になっていることが確かめられる。これらは、発達中の温帯低気圧において実際にみられる特徴である。



傾圧不安定波における地衡流線関数偏差の空間構造



傾圧不安定波における温度偏差の空間構造

以上の理論は、イーディーによって 1940 年代後半に提唱されたものである
Eric Eady 1915-1966

る。大気の下端だけでなく上端でも鉛直流がゼロであると仮定しているなど、現実的ではない部分もあるが、それでも現実の温帯低気圧の成長（傾圧不安定）をよく表していると考えられている。なお、チャーニーが、イーディー
Jule G. Charney 1917-1981

の少し前に、より現実に近い条件のもとで、傾圧不安定の理論モデルを提唱している（イーディーの理論よりは複雑である）。

課題 9.1 式(28)から、南北風と温度偏差の空間構造を計算し、図示せよ。