８　準地衡方程式系

中緯度での大きな空間スケールでの大気の運動においては、地衡風平衡が近似的に成り立っている。つまり、水平風の地衡風成分は、非地衡風成分よりも大きい。この条件を用いて近似を行ない、プリミティブ方程式系から、温帯低気圧に代表される総観規模の大気の運動を記述する方程式系を導出する。

８．１　運動方程式のスケール解析

第 6 章の(1)、(2)より、

$$\frac{\partial}{\partial t}u + u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial y}u + \omega\frac{\partial}{\partial p}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v + u\frac{\partial}{\partial x}v + v\frac{\partial}{\partial y}v + \omega\frac{\partial}{\partial p}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{2}$$

ただし、粘性項は無視している。ここで、(1)、(2)の各項の大きさを見積もることを考える。まず、対象としている現象の代表的な空間スケールをL、風速の代表的なスケールをUとする。総観規模の温帯低気圧や移動性高気圧を対象にする場合、

$$L \approx 10^6 \text{ m}, \quad U \approx 10 \text{ m/s} \tag{3}$$

である。また、中緯度においては、コリオリ係数 f は、

$$f \approx 10^{-4} \text{ /s} \tag{4}$$

である。したがって、左辺の時間変化項と移流項の代表的スケールは、

$$\frac{U^2}{L} \approx 10^{-4} \text{ m/s}^2 \tag{5}$$

右辺第 1 項のコリオリ項の代表的スケールは、

$$fU \approx 10^{-3} \text{ m/s}^2 \tag{6}$$

地衡風平衡が近似的に成り立っているので、右辺第 2 項の気圧傾度項も同じスケールである。

$$\begin{array}{cccccc}
\dfrac{\partial}{\partial t}u & +u\dfrac{\partial}{\partial x}u + v\dfrac{\partial}{\partial y}u + \omega\dfrac{\partial}{\partial p}u & = & fv & -\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} \\
\dfrac{\partial}{\partial t}v & +u\dfrac{\partial}{\partial x}v + v\dfrac{\partial}{\partial y}v + \omega\dfrac{\partial}{\partial p}v & = & -fu & -\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} \\
\dfrac{U^2}{L} \approx 10^{-4} & \dfrac{U^2}{L} \approx 10^{-4} & & fU \approx 10^{-3} & \approx 10^{-3}
\end{array}$$

以上のスケールの評価において、コリオリ項に対する、時間変化項や移流項の比を**ロスビー数**(Rossby number)という。ロスビー数R_oは、

$$R_O = \frac{U^2/L}{fU} = \frac{U}{fL} \tag{7}$$

と定義できる。ロスビー数が小さいほど、地衡風平衡がよく成り立っているといえる。中緯度では、$R_o \approx 0.1$である。

８．２　地衡風成分と非地衡風成分

ここで、u、vを地衡風成分u_g、v_gと非地衡風成分u_a、v_aに分けて考える。つまり、

$$u_g = -\frac{1}{f_0}\frac{\partial \Phi}{\partial y},\ v_g = \frac{1}{f_0}\frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{8}$$

とする。ただし、コリオリ係数としては、代表的緯度での値f_0を用いている。このように定義したu_g、v_gを用いて、u、vを

$$u = u_g + u_a,\ v = v_g + v_a \tag{9}$$

とおく。地衡風平衡がよく成り立っているという条件のもとでは、

$$u_g >> u_a,\ v_g >> v_a \tag{10}$$

である。(1)、(2)において、左辺の時間変化項と移流項は、右辺の２つの項に比べて小さい。そこで、もっとも主要な成分である地衡風成分どうしの積のみを考慮して、

$$\frac{\partial}{\partial t}u + u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial y}u + \omega\frac{\partial}{\partial p}u \approx \frac{\partial}{\partial t}u_g + u_g\frac{\partial}{\partial x}u_g + v_g\frac{\partial}{\partial y}u_g \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v + u\frac{\partial}{\partial x}v + v\frac{\partial}{\partial y}v + \omega\frac{\partial}{\partial p}v \approx \frac{\partial}{\partial t}v_g + u_g\frac{\partial}{\partial x}v_g + v_g\frac{\partial}{\partial y}v_g \tag{12}$$

と近似する。鉛直風ωは非地衡風であるので、(11)、(12)の右辺には含まれない。

一方、(1)、(2)の右辺において、u、vを地衡風成分と非地衡風成分に分け、さらに、

$$f \approx f_0 + \beta y \tag{13}$$

と近似すると、

$$fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \approx (f_0 + \beta y)(v_g + v_a) - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{14}$$

$$-fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \approx -(f_0 + \beta y)(u_g + u_a) - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{15}$$

と書ける。地衡風成分に比べて非地衡風成分は小さいが、さらに、f_0に比べてβyは小さい。そこで、小さいものどうしの積である$\beta y v_a$、$\beta y v_a$の項を無視して、

$$fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \approx (f_0 + \beta y)v_g + f_0 v_a - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{16}$$

$$-fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \approx -(f_0 + \beta y)u_g - f_0 u_a - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{17}$$

とする。(11)、(12)、(16)、(17)より、(1)、(2)は、

$$\frac{\partial}{\partial t}u_g + u_g \frac{\partial}{\partial x}u_g + v_g \frac{\partial}{\partial y}u_g = (f_0 + \beta y)v_g + f_0 v_a - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v_g + u_g \frac{\partial}{\partial x}v_g + v_g \frac{\partial}{\partial y}v_g = -(f_0 + \beta y)u_g - f_0 u_a - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{19}$$

と近似できる。

８．３　渦度方程式

地衡風は非発散であり、

$$\frac{\partial}{\partial x}u_g + \frac{\partial}{\partial y}v_g = 0 \tag{20}$$

であることを用いて、(19)のx偏微分と(18)のy偏微分との差を計算すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}v_g - \frac{\partial}{\partial y}u_g\right) = -\beta v_g - f_0\left(\frac{\partial}{\partial x}u_a + \frac{\partial}{\partial y}v_a\right) \tag{21}$$

が得られる。ここで地衡風の相対渦度ξ_gを$\xi_g = \frac{\partial}{\partial x}v_g - \frac{\partial}{\partial y}u_g$とおいて、(21)を変形すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}\right)(f_0 + \beta y + \xi_g) = -f_0\left(\frac{\partial}{\partial x}u_a + \frac{\partial}{\partial y}v_a\right) \tag{22}$$

となる。さらに、(22)に対して、連続の式

$$\frac{\partial}{\partial x}u_a + \frac{\partial}{\partial y}v_a + \frac{\partial}{\partial p}\omega = 0 \tag{23}$$

を用いると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}\right)(f_0 + \beta y + \xi_g) = f_0 \frac{\partial}{\partial p}\omega \tag{24}$$

が得られる。ここで、

$$\xi_g = \frac{\partial}{\partial x}v_g - \frac{\partial}{\partial y}u_g = \frac{1}{f_0}\nabla^2 \Phi \tag{25}$$

だから、**地衡流線関数**(geostrophic stream function)Ψ_gを

$$\Psi_g = \frac{1}{f_0}\Phi \tag{26}$$

と定義すれば、

$$\xi_g = \nabla_p{}^2 \Psi_g \tag{27}$$

となって、(25)は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(f_0 + \beta y + \nabla_p{}^2 \Psi_g\right) = f_0 \frac{\partial}{\partial p}\omega \tag{28}$$

と書ける。

８．４　熱力学方程式

第 6 章の(6)より、

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta + u\frac{\partial}{\partial x}\theta + v\frac{\partial}{\partial y}\theta + \omega\frac{\partial}{\partial p}\theta = 0 \tag{29}$$

ただし、非断熱加熱を無視している。ここで、圧力 p にだけ依存する温位 θ の基本場 θ_R を定義すると、基本場の温位の鉛直勾配 $\frac{d\theta_R}{dp}$ は、温位の偏差の鉛直勾配に比べてじゅうぶんに大きいので、

$$\frac{\partial}{\partial p}\theta \approx \frac{d\theta_R}{dp} \tag{30}$$

である。さらに、水平移流項の u 、v を u_g、v_g に置き換えると、(29)は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}\right)\theta = -\omega\frac{d\theta_R}{dp} \tag{31}$$

と書ける。ここで、理想気体の状態方程式

$$p\alpha = RT \tag{32}$$

と静水圧平衡の関係

$$\frac{\partial}{\partial p}\Phi = -\alpha \tag{33}$$

を用いると、

$$T = -\frac{p}{R}\frac{\partial}{\partial p}\Phi \tag{34}$$

が導かれ、温位 θ は

$$\theta = T\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}} \tag{35}$$

だから、

$$\theta = -\frac{p}{R}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}} \frac{\partial}{\partial p}\Phi \tag{36}$$

となる。これを(14)に代入すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}\right)\left\{-\frac{p}{R}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}} \frac{\partial}{\partial p}\Phi\right\} = -\omega \frac{d\theta_R}{dp} \tag{37}$$

と書ける。ここで、θ_R が圧力 p にだけ依存し、x、y、t に依存しないことを考慮すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}\right)\left\{-\frac{p}{R}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}} \left(\frac{d\theta_R}{dp}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial p}\Phi\right\} = -\omega \tag{38}$$

と変形することができる。ここで、圧力 p にだけ依存する変数 s を

$$s^2 = -\frac{R}{p}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R}{C_p}} \frac{d\theta_R}{dp} \tag{39}$$

と定義する。s は p 座標における安定度の指標とみなせる。このとき、(38)は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Phi\right) = -\omega \tag{40}$$

と表せる。さらに、地衡流線関数 Ψ_g を用いれば、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{f_0}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi_g\right) = -\omega \tag{41}$$

が得られる。

８．５　準地衡渦位

(28)と(41)から ω を消去することを考える。まず、(41)を p で偏微分すると、

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}\right)\left\{\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi_g\right)\right\} + \left(\frac{\partial u_g}{\partial p}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial p}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{f_0}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi_g\right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial p}\omega\end{aligned} \tag{42}$$

となる。ここで、

$$u_g = -\frac{\partial \Psi_g}{\partial y},\ \ v_g = \frac{\partial \Psi_g}{\partial x} \tag{43}$$

だから、(42)の左辺第 2 項は消去できて、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\left\{\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi_g\right)\right\}=-\frac{\partial}{\partial p}\omega \tag{44}$$

が得られる。(44)に f_0 をかけて、(28)との和を計算すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\left\{f_0+\beta y+\nabla_p{}^2\Psi_g+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0{}^2}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi_g\right)\right\}=0 \tag{45}$$

となる。ここで、

$$\frac{D_g}{Dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y} \tag{46}$$

と定義すれば、

$$\frac{D_g}{Dt}\left\{f_0+\beta y+\nabla_p{}^2\Psi_g+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0{}^2}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi_g\right)\right\}=0 \tag{47}$$

となる。(47)は、

$$q=f_0+\beta y+\nabla_p{}^2\Psi_g+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0{}^2}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi_g\right) \tag{48}$$

が地衡風に沿って保存することを示している。この q を**準地衡渦位**(quasi-geostrophic potential vorticity)という。

なお、鉛直座標として圧力 p の代わりに高度 z を用いると、(47)は、

$$\frac{D_g}{Dt}\left\{f_0+\beta y+\nabla_p{}^2\Psi_g+\frac{1}{\rho_R}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_R\frac{f_0{}^2}{N^2}\frac{\partial}{\partial z}\Psi_g\right)\right\}=0 \tag{49}$$

と表せる。ただし、ρ_R は θ_R から計算される基本場の密度である。N はブラント・ヴァイサラ振動数であり、

$$N^2=g\frac{1}{\theta_R}\frac{d\theta_R}{dz} \tag{50}$$

と定義される。仮に、ρ_R が高度によらず一定とすると、(49)は

$$\frac{D_g}{Dt}\left\{f_0+\beta y+\nabla_p{}^2\Psi_g+\frac{f_0{}^2}{N^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Psi_g\right\}=0$$

と書くことができる。このとき、鉛直方向の 2 階微分の $f_0{}^2/N^2$ 倍が水平方向の 2 階微分に対応していることがわかる。これは、準地衡系では、現象の水平スケールが鉛直スケールの N/f_0 倍程度になることを意味している。$N=10^{-2}$/s、

$f_0 = 10^{-4}$/s とすれば、水平スケールは鉛直スケールの 100 倍程度になり、観測事実と一致する。

８．６　オメガ方程式

前節では、連立方程式(28)、(41)から ω を消去して、準地衡渦位 q の時間変化を予報する方程式(47)を求めた。ここでは、(28)と(41)から時間変化項を消去し、ω を診断的に求める方程式を導出する。まず、(28)を p で偏微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial p}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(f_0 + \beta y + \nabla_p{}^2 \Psi_g\right)\right\} = f_0 \frac{\partial^2}{\partial p^2}\omega \qquad (51)$$

となって、

$$\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial t}\left(f_0 + \beta y + \nabla_p{}^2 \Psi_g\right) + \frac{\partial}{\partial p}\left\{\left(u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(f_0 + \beta y + \nabla_p{}^2 \Psi_g\right)\right\} = f_0 \frac{\partial^2}{\partial p^2}\omega$$

左辺第 1 項で微分の順序を入れ替えると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla_p{}^2 \frac{\partial \Psi_g}{\partial p}\right) + \frac{\partial}{\partial p}\left\{\left(u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(f_0 + \beta y + \nabla_p{}^2 \Psi_g\right)\right\} = f_0 \frac{\partial^2}{\partial p^2}\omega$$

両辺に $-\frac{f_0}{s^2}$ をかけて、

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{f_0}{s^2}\nabla_p{}^2 \frac{\partial \Psi_g}{\partial p}\right) - \frac{f_0}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\left\{\left(u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(f_0 + \beta y + \nabla_p{}^2 \Psi_g\right)\right\} = -\frac{f_0{}^2}{s^2}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\omega \qquad (52)$$

が得られる。一方、(41)の両辺に $\nabla_p{}^2$ を作用させると、

$$\nabla_p{}^2\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{f_0}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi_g\right)\right\} = -\nabla_p{}^2 \omega \qquad (53)$$

となって、

$$\nabla_p{}^2\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{f_0}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi_g\right)\right\} + \nabla_p{}^2\left\{\left(u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{f_0}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi_g\right)\right\} = -\nabla_p{}^2 \omega$$

左辺第 1 項で微分の順序を入れ替えると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{f_0}{s^2}\nabla_p{}^2 \frac{\partial}{\partial p}\Psi_g\right) + \nabla_p{}^2\left\{\left(u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{f_0}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi_g\right)\right\} = -\nabla_p{}^2 \omega \qquad (54)$$

が得られる。(52)と(54)の和を計算すると、

$$
-\frac{f_0}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\left\{\left(u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(f_0+\beta y+\nabla_p{}^2\Psi_g\right)\right\}+\nabla_p{}^2\left\{\left(u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{f_0}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi_g\right)\right\}
$$

$$
=-\frac{f_0{}^2}{s^2}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\omega-\nabla_p{}^2\omega
$$

となる。ここで、

$$
u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}=\overrightarrow{u_g}\bullet\nabla_p
$$

を用いると、

$$
\left(\nabla_p{}^2+\frac{f_0{}^2}{s^2}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\omega
$$

$$
=\frac{f_0}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\left\{\overrightarrow{u_g}\bullet\nabla_p\left(f_0+\beta y+\nabla_p{}^2\Psi_g\right)\right\}-\nabla_p{}^2\left\{\overrightarrow{u_g}\bullet\nabla_p\left(\frac{f_0}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi_g\right)\right\}
$$

と書けて、

$$
\left(\nabla_p{}^2+\frac{f_0{}^2}{s^2}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\omega=F_1+F_2 \qquad (55)
$$

が得られる。ただし、

$$
F_1=-\frac{f_0}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\left\{-\overrightarrow{u_g}\bullet\nabla_p\left(f_0+\beta y+\nabla_p{}^2\Psi_g\right)\right\}
$$

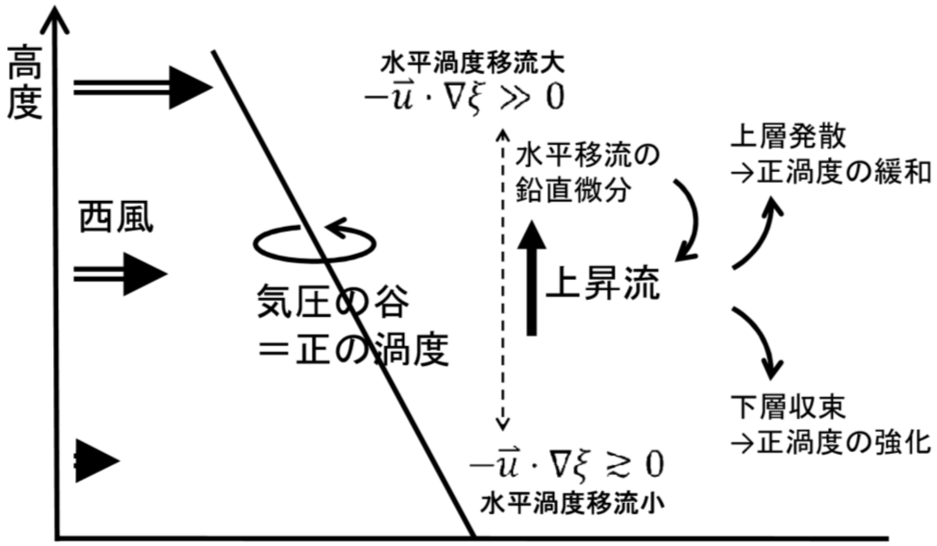
$$
F_2=-\nabla_p{}^2\left\{-\overrightarrow{u_g}\bullet\nabla_p\left(-\frac{f_0}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi_g\right)\right\}
$$

である。これを**オメガ方程式**(omega equation)という。

オメガ方程式を用いると、ある時刻での地衡流線関数Ψ_gの分布から鉛直流ωを診断することができる。つまり、(55)の左辺は鉛直流ωの2階微分になっているので、右辺のF_1+F_2の分布が求まると、ωを決定することができる。ωが波型の構造をしている場合、F_1+F_2が正のとき、ωは負であり上昇流となる。

(55)において、右辺第1項F_1は地衡渦度の水平移流の鉛直微分である。たとえば、トラフの前面では正の渦度が西風によって移流されてくるから、渦度の移流$\left\{-\overrightarrow{u_g}\bullet\nabla_p\left(f_0+\beta y+\nabla_p{}^2\Psi_g\right)\right\}$は正である。上空ほど西風が強いので、移流項の値は大きくなる。このため、p微分は負となる。したがって、F_1は正であり、ト

ラフの前面では地衡渦度の水平移流によって上昇流を生じさせる作用がはたらくことがわかる。上昇流にともない、上層で水平発散が生じて渦度を減少させる効果、下層で水平収束が生じて渦度を増加させる効果が生じるので、地衡渦度の水平移流によって生じる渦度偏差は平滑化される。



一方、第 2 項 F_2 は温位偏差の水平移流の水平 2 階微分である。たとえば、トラフの前面では南風によって正の温度移流が生じているから、温度移流項は正である。これを水平 2 階微分し、符号を反転されたものが F_2 であるから、結局 F_2 は正である。したがって、トラフの前面では温度移流によって上昇流を生じさせる作用がはたらくことがわかる。上昇流によって温度が低下するので、水平温度移流によって生じる温度偏差は緩和される。

このように、準地衡系においては、力学場（渦度場）と熱力学場（温度場）との間の拘束条件が強く、両者は自由には変動できない。このため、渦度偏差だけが与えられたり温度偏差だけが与えられたりしても、結局、渦度場の偏差と温度場の偏差の両方に偏差が分配され、場の整合性を保とうとしている。

課題 8.1　理想気体の状態方程式と静水圧平衡の関係を用いて、(47)から(49)を導出せよ。本来、$\dfrac{\partial}{\partial p}$ は $\dfrac{1}{\rho g}\dfrac{\partial}{\partial z}$ に置き換えられるが、近似的に $\dfrac{1}{\rho_R g}\dfrac{\partial}{\partial z}$ としてよい。同様に、$\dfrac{d}{dp}$ を $\dfrac{1}{\rho_R g}\dfrac{d}{dz}$ に置き換えてよい。