

地球物理学（2015 年度春学期）（流体地球物理学分野）
最終テスト

注意：計算問題においては計算過程も示すこと。

1. 水平面（ $x-y$ 平面）上での水の流れを考える。座標軸は、東の方向を $+x$ 、北の方向を $+y$ と定義する。流速ベクトル $\vec{u}$ は、 $\vec{u} = (ay, 0)$ ($a > 0$) である。また、初期時刻 $t = 0$ において、温度 T は南西のほうが高く、温度勾配 ∇T は、 $\nabla T = (-b, -c)$ ($b > 0, c > 0$) である。水じたいが加熱、冷却されることはなく、断熱的である。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 温度 T のラグランジュ微分 $\frac{D}{Dt}T$ の値を答えよ。

(2) 時刻 $t = 0$ における $\vec{u} \bullet \nabla T$ を求めよ (a 、 b 、 c を用いて表せ)。

(3) 以上の小問の結果を用いて、時刻 $t = 0$ における、温度 T のオイラー微分 $\frac{\partial}{\partial t}T$ を求めよ。

(4) 以上の小問の結果を用いて、時刻 $t = 0$ における、温度勾配 ∇T の時間微分（オイラー微分） $\frac{\partial}{\partial t}(\nabla T)$ を求めよ。

(余白)

2. プリミティブ方程式系の運動方程式を応用して、渦度と水平発散に関する以下の問いに答えよ。

気圧座標（ p 座標）における運動方程式の x 成分（東西成分）と y 成分（南北成分）は次のように書ける。

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}u &= fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + F_x \\ \frac{D}{Dt}v &= -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} + F_y\end{aligned}$$

ただし、 u 、 v 、 Φ は、それぞれ東西風、南北風、ジオポテンシャルである。 F_x 、 F_y は粘性の効果を表すが、以下では無視してよい。また、 f はコリオリ係数であり、時間、場所によらず正の一定値をとる。ここで、運動量の移流の効果は無視できると仮定して、ラグランジュ微分をオイラー微分に置き換える。このとき、上記の運動方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{①}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{②}$$

と書ける。

(1) ①の両辺を x で偏微分せよ。定数は微分演算子の前に出して記せ。

(2) ②の両辺を y で偏微分せよ。定数は微分演算子の前に出して記せ。

(3) (1) で得られた 2 つの方程式において、定常を仮定し時間微分をゼロとする。このとき、2 つの方程式の和を計算することによって、渦度 $\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ を求め、 f 、 $\nabla^2 \Phi$ で表せ。ただし、 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ とする。

(4) ①、②を用いて、定常という条件のもとで、水平発散 $D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ を求めよ。

ヒント：①の両辺を y で偏微分、②の両辺を x で偏微分し、定常を仮定したうえで両者の差を計算せよ。

3. 温度風の関係について、以下の問いに答えよ。

気圧座標（ p 座標）において、運動方程式の y 成分（南北成分）は、

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad ①$$

と書ける。一方、静水圧平衡の関係は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha$$

であって、理想気体の状態方程式は

$$p\alpha = RT$$

であるから、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p} \quad ②$$

が成り立つ。ただし、 u 、 v は風速の x 成分（東西成分）、 y 成分（南北成分）、 Φ はジオポテンシャル、 T は温度、 α は比容（密度の逆数）である。また、 R は気体定数、 f はコリオリ係数（ $f > 0$ ）であり、いずれも一定の値をとる。

（1）南北風 v は時間、場所によらずゼロであると仮定する。①、②を用いて、東西風の鉛直シア（圧力微分） $\frac{\partial u}{\partial p}$ を R 、 f 、 p 、 $\frac{\partial T}{\partial y}$ で表せ。

ヒント：①で $\frac{D}{Dt}v = 0$ としたうえで、両辺を p で偏微分し、 $\frac{\partial u}{\partial p}$ と $\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)$ との間の関係式を求めよ。次に、②を y で偏微分せよ。

(2) $\Phi = gz$ であることを考慮すると、静水圧平衡の関係は、

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{g}{\alpha}$$

と書ける。ただし、 g は重力加速度、 z は高度である。(1)の結果と静水圧平衡の関係から $\frac{\partial u}{\partial z}$ を求め、さらに理想気体の状態方程式を使って、 $\frac{\partial u}{\partial z}$ を g 、 f 、 T 、 $\frac{\partial T}{\partial y}$ で表せ。

(3) 北半球中緯度のある観測点において、対流圏中層のある高度（等圧面）での南北温度勾配の大きさが 100 km につき 1.0 K（南のほうが高温）であった。このとき、(2)の結果を用いて、東西風の鉛直シア $\frac{\partial u}{\partial z}$ の値（単位は/s）を有効数字 2 けたで求めよ。ただし、 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 、 $f = 1.0 \times 10^{-4} \text{ /s}$ 、 $T = 2.7 \times 10^2 \text{ K}$ とする。符号にも注意すること。