地球物理学（流体地球物理学分野）　予習課題２

これは、地球物理学（流体地球物理学分野）を履修するにあたって必要となる連続体力学の基礎知識を復習するための課題です。この予習課題２は解答例とともに配布しています。レポート用紙に解答し自分で答え合わせをしたうえで、流体地球物理学分野の初回の授業の開始時までに提出してください。

問１〔フックの法則とヤング率、ポアソン比〕

等方均質弾性体にはたらく**応力テンソル** τ_{ij} は、

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\delta_{ij}\sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \tag{1}$$

と表せる。これは、テンソルで表現された**フックの法則**である。ここで、応力テンソル τ_{ij} は弾性体中の微小体積の立方体の j 方向の境界面にはたらく i 方向の力である。u_i は変位であり、$\partial u_i/\partial x_j$ は**歪みテンソル**とよばれる。λ、μ はラメ定数である。(1)を場合分けして、垂直応力について、

$$\tau_{ii} = 2\mu\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \lambda\sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \tag{2}$$

せん断応力について、

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (i \neq j) \tag{3}$$

と表すこともできる。

(1)や(2)、(3)は、応力テンソルの各成分を歪みテンソルの各成分の関数として表している。ここで、逆に、歪みテンソルの各成分（$i = j$）を応力テンソルの各成分で表してみよう。(2)の各成分を書き出せば、

$$\begin{aligned}
\tau_{xx} &= 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
\tau_{yy} &= 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
\tau_{zz} &= 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{4}$$

となる。(4)の３つの式の和を計算すると、

$$\tau_{xx}+\tau_{yy}+\tau_{zz}=(2\mu+3\lambda)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{5}$$

(4)に代入すると、

$$\tau_{xx}=2\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}(\tau_{xx}+\tau_{yy}+\tau_{zz})$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\lambda+\mu}{\mu(2\mu+3\lambda)}\tau_{xx}-\frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}(\tau_{yy}+\tau_{zz})\\
\frac{\partial v}{\partial y}&=\frac{\lambda+\mu}{\mu(2\mu+3\lambda)}\tau_{yy}-\frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}(\tau_{zz}+\tau_{xx})\\
\frac{\partial w}{\partial z}&=\frac{\lambda+\mu}{\mu(2\mu+3\lambda)}\tau_{zz}-\frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}(\tau_{xx}+\tau_{yy})
\end{aligned} \tag{6}$$

式(6)は、1 方向にだけ垂直応力がはたらいたとき（たとえば、$\tau_{xx}\neq 0$、$\tau_{yy}=\tau_{zz}=0$）、その方向に引張や圧縮（$\partial u/\partial x$）が生じるだけでなく、垂直な方向にも引張や圧縮（$\partial v/\partial y$、$\partial w/\partial z$）が生じることを示している。

（1）体積弾性率Kは、

$$p=-K\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

と定義される。ただし、pは圧力であり、

$$p=-\frac{1}{3}(\tau_{xx}+\tau_{yy}+\tau_{zz})$$

が成り立つ。式(5)を用いて体積弾性率を求め、λ、μで表せ。

（2）**ヤング率**Eとは、1 方向にだけ垂直応力がはたらいたとき、垂直応力と、その方向に生じた引張や圧縮との比である（たとえば、$E=\dfrac{\tau_{xx}}{\partial u/\partial x}$）。式(6)を用いてヤング率を求め、$\lambda$、$\mu$で表せ。

（3）**ポアソン比**νとは、1 方向にだけ垂直応力がはたらいたとき、応力に垂直な方向に生じた引張（圧縮）と、応力に平行な方向に生じた圧縮（引張）との比である（たとえば、$\nu=-\dfrac{\partial v/\partial y}{\partial u/\partial x}=-\dfrac{\partial w/\partial z}{\partial u/\partial x}$）。式(6)を用いてポアソン比を求め、$\lambda$、$\mu$で表せ。

（4）多くの岩石ではλとμは近い値をとる。$\lambda=\mu$のとき、ポアソン比の値を求めよ。

問２〔運動方程式と地震波〕

弾性体内部の微小体積の立方体についての運動方程式は一般に、

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} \tag{7}$$

と書ける。(7)の各成分を書き出せば、

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{xz} \\ &\cdots \\ &\cdots \end{aligned} \tag{8}$$

となる。一方で、応力テンソルは、(2)、(3)より、

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \tau_{xy} &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \tau_{xz} &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ &\cdots \\ &\cdots \\ &\cdots \\ &\cdots \\ &\cdots \\ &\cdots \end{aligned} \tag{9}$$

と表される。(9)を(8)に代入すると、

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \mu \nabla^2 u \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \mu \nabla^2 v \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \mu \nabla^2 w \end{aligned} \tag{10}$$

となる。これは、フックの法則のもとでの弾性体の運動方程式である。運動方程式(10)を用いて、地震波の位相速度を計算しよう。

（１） **Ｐ波**においては、波が伝播する方向と平行な方向に変位が生じる。たと

えば、波がx方向に伝播する場合、$u \neq 0$、$v = w = 0$である。x方向に伝播するので、uは$u = \mathrm{Re}\,\hat{u}\exp[i(kx - \omega t)]$（$\hat{u}$は定数）と書ける。これらを(10)の第１式に代入することによって、Ｐ波の位相速度$c = \omega / k$（$c > 0$）を求めよ。

（２）**Ｓ波**においては、波が伝播する方向と垂直な方向に変位が生じる。たとえば、波がx方向に伝播し、変位がy方向に生じる場合、$v \neq 0$、$u = w = 0$である。x方向に伝播するので、vは$v = \mathrm{Re}\,\hat{v}\exp[i(kx - \omega t)]$（$\hat{v}$は定数）と書ける。これらを(10)の第２式に代入することによって、Ｓ波の位相速度$c = \omega / k$（$c > 0$）を求めよ。

（３）多くの岩石ではλとμは近い値をとる。$\lambda = \mu$のとき、Ｓ波の位相速度に対するＰ波の位相速度の比を求めよ。

問３〔重力と静水圧平衡〕

完全に球形で半径Rの惑星の内部の密度ρが中心からの距離rの関数として与えられているとする。このとき、中心からの距離rにおける重力の大きさは、距離rよりも内側にある質量の総量と等しい質量を持つ質点が惑星の中心にあると仮定した場合の重力の大きさに等しくなる。中心からの距離rよりも外側の質量は重力の大きさに影響せず、また、総量が等しければ距離rよりも内側での質量の分布形も重力の大きさに影響しない。このとき、中心からの距離r（$0 < r \leq R$）における重力加速度gは、

$$g = \frac{G}{r^2}\int_0^r 4\pi r'^2 \rho\, dr' \tag{11}$$

と書ける。Gは万有引力定数である。gは定数ではなく、rの関数であることに注意する。なお、重力は本来、万有引力と遠心力の合力であるが、ここでは惑星の自転を無視し、万有引力のみを考慮している。

（１）密度ρが中心からの距離rによらない定数としたとき、重力加速度gをrの関数として求めよ。ただし、$0 < r \leq R$とする。

（２）惑星内部の圧力pに関して**静水圧平衡**が成り立っているとする。つまり、

$$\frac{dp}{dr} = -\rho g \tag{12}$$

と書けるものとする。（１）で求めたgを用いて、圧力pをrの関数として求めよ。ただし、$0 < r \leq R$とする。また、大気圧は無視し、$r = R$で$p = 0$とする。

解答例：

問１

（１）体積弾性率の定義から、

$$K=-\frac{p}{\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}}=\frac{\tau_{xx}+\tau_{yy}+\tau_{zz}}{3\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)}$$

が成り立つので、式(5)より、

$$K=\frac{2\mu+3\lambda}{3}$$

（２）式(6)の第１式で $\tau_{yy}=\tau_{zz}=0$ とすると、

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\lambda+\mu}{\mu(2\mu+3\lambda)}\tau_{xx}$$

だから、

$$E=\frac{\mu(2\mu+3\lambda)}{\lambda+\mu}$$

（３）式(6)の第 1～3 式で $\tau_{yy}=\tau_{zz}=0$ とすると、

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\lambda+\mu}{\mu(2\mu+3\lambda)}\tau_{xx}$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}\tau_{xx}$$
$$\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}\tau_{xx}$$

だから、

$$\nu=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

（４）（３）の解で $\lambda=\mu$ とすると、

$$\nu=\frac{1}{4}$$

問２

（１）(10)の第１式に $v=w=0$ を代入すると、

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mu\nabla^2 u$$

さらに、$u=\mathrm{Re}\,\hat{u}\exp[i(kx-\omega t)]$を代入すると、

$$-\rho\omega^2\hat{u}\exp[i(kx-\omega t)]=-(\lambda+\mu)k^2\hat{u}\exp[i(kx-\omega t)]-\mu k^2\hat{u}\exp[i(kx-\omega t)]$$

だから、

$$-\rho\omega^2=-(\lambda+2\mu)k^2$$

$$c=\frac{\omega}{k}=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$$

（２）(10)の第２式に$u=w=0$を代入すると、

$$\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\mu\nabla^2 v$$

さらに、$v=\mathrm{Re}\,\hat{v}\exp[i(kx-\omega t)]$を代入すると、

$$-\rho\omega^2\hat{v}\exp[i(kx-\omega t)]=-\mu k^2\hat{v}\exp[i(kx-\omega t)]$$

だから、

$$-\rho\omega^2=-\mu k^2$$

$$c=\frac{\omega}{k}=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

（３）$\lambda=\mu$のとき、位相速度の比は、

$$\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\mu}}=\sqrt{3}$$

問３

（１）(11)より、

$$g=\frac{G}{r^2}\int_0^r 4\pi r'^2\rho dr'=\frac{G}{r^2}\left[\frac{4}{3}\pi\rho r'^3\right]_0^r=\frac{4}{3}\pi G\rho r$$

（２）(12)と（１）の結果より、

$$\frac{dp}{dr}=-\rho g=-\frac{4}{3}\pi G\rho^2 r$$

$r=R$で$p=0$だから、

$$p = -\int_r^R \frac{dp}{dr'}\,dr' = \int_r^R \frac{4}{3}\pi G\rho^2 r'\,dr' = \left[\frac{2}{3}\pi G\rho^2 r'^2\right]_r^R = \frac{2}{3}\pi G\rho^2\left(R^2 - r^2\right)$$