地球物理学（2014 年度春学期）（流体地球物理学分野）
最終テスト

注意：計算問題においては計算過程も示すこと。

１．ある平野で風速 4.0 m/s の水平風が一様に吹いている。鉛直風は吹いていない。その平野には A、B の２つの観測点がある。ある時刻に観測点 A で気温を測定したところ 20.0 ℃であった。同じ時刻に 1.0 km 風上に位置する観測点 B で気温を測定したところ 19.0 ℃であった。また、観測点 A では気温は１分間に 0.18 ℃の割合で低下していた。この平野での気温 T の水平勾配 ∇T は一様で時間変化しないものとして、以下の問いに答えよ。解答は、国際単位系（たとえば、温度の単位は K、時間の単位は s である）にしたがい、有効数字２けたまで示すこと。また、符号にも注意すること。

（１）観測点 A における気温 T のオイラー微分 $\dfrac{\partial}{\partial t}T$ の値を計算せよ。

（２）水平風ベクトルを $\vec{u}$ としたとき、$\vec{u}\bullet\nabla T$ の値を計算せよ。

ヒント：$\vec{u}$ の表式や ∇T の表式は座標系のとり方（x 軸や y 軸をどの方向にとるか）に依存するが、$\vec{u}\bullet\nabla T$ の値は座標系のとり方に依存しない。

（３）以上の小問の結果を用いて、気温 T のラグランジュ微分 $\dfrac{D}{Dt}T$ の値を計算せよ。

２．大気の運動エネルギーに関連した、以下の問いに答えよ。

気圧座標（p 座標）における運動方程式の x 成分（東西成分）と y 成分（南北成分）はそれぞれ、次のように書ける。

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad ①$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \qquad ②$$

ただし、u は東西風、v は南北風、Φ はジオポテンシャルである。また、f はコリオリ係数（$f > 0$）で一定の値をとる。以下、鉛直流はゼロとし、特定の等圧面内で大気の運動を考える。

（１）一般にスカラーの物理量 $a = a(x, y, t)$ について、

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{a^2}{2}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{a^2}{2}\right) \qquad ③$$

を計算し、a と $\dfrac{D}{Dt}a$ のみで表せ。

ヒント：たとえば、$\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{a^2}{2}\right) = a\dfrac{\partial}{\partial t}a$ である。

（２）①、②より、運動エネルギーのラグランジュ微分

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{u^2 + v^2}{2}\right) = \frac{D}{Dt}\left(\frac{u^2}{2}\right) + \frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) \qquad ④$$

を計算し、時間微分を含まない形で表せ。ただし、∇ を用いて

$$u\frac{\partial \Phi}{\partial x} + v\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \vec{u} \bullet \nabla\Phi \qquad ⑤$$

と表してよい。

ヒント：まず、④に（１）の結果を適用せよ。次に、①に u、②に v をかけよ。

３．連続の式について、以下の問いに答えよ。

気圧座標（p 座標）において、連続の式は、

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial p}=0 \qquad ①$$

と書ける。ただし、u、v、ω は風速の x 成分（東西成分）、y 成分（南北成分）、p 成分である。

（１）ある観測点では現在の地表面気圧が 1000.0 hPa であり、１時間に 3.6 hPa の割合で増加している。地表面における ω の値を求めよ。単位は Pa/s（hPa ではなく Pa、/h ではなく/s である点に注意せよ）、有効数字２けたで答えよ。

（２）200 hPa 面で $\omega=0$ である。200 hPa 面から 1000 hPa 面まで水平発散 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$ の値が一定であるという仮定のもとで、この範囲での水平発散の値を求めよ。解答は、国際単位系（たとえば、時間の単位は s である）にしたがい、有効数字２けたまで示すこと。また、符号にも注意すること。

ヒント:①を p について $p_1=200\,\mathrm{hPa}$ から $p_2=1000\,\mathrm{hPa}$ まで積分せよ。

４．温度風の関係について、以下の問いに答えよ。

気圧座標（p 座標）において、運動方程式の y 成分（南北成分）は、

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \qquad ①$$

と書ける。一方、静水圧平衡の関係は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha$$

であって、理想気体の状態方程式は

$$p\alpha = RT$$

であるから、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p} \qquad ②$$

が成り立つ。ただし、u、v は風速の x 成分（東西成分）、y 成分（南北成分）、Φ はジオポテンシャル、T は温度、α は比容（密度の逆数）である。また、R は気体定数、f はコリオリ係数（$f>0$）であり、いずれも一定の値をとる。

（１）①において、南北風 v は時間、場所によらずゼロであると仮定したうえで、両辺を p で偏微分し、$\dfrac{\partial u}{\partial p}$ と $\dfrac{\partial}{\partial p}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\right)$ との間の関係式を求めよ。

（２）（１）の結果と、②を用いて、温度の南北勾配 $\dfrac{\partial T}{\partial y}$ を R、f、p、$\dfrac{\partial u}{\partial p}$ で表せ。

（３）北半球中緯度のある観測点では、850 hPa 面で南の風 4.1 m/s、750 hPa 面で南西の風 5.8 m/s であった。これら２つの等圧面の間では風速ベクトルの p 微分は一定とする。（２）の結果を用いて、800 hPa 面での温度の南北勾配の絶対値（単位は K/m）を有効数字 2 けたで求めよ。ただし、$R = 2.9\times10^{2}$ J/kg K、$f = 1.0\times10^{-4}$ /s、$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = 0.71$ とする。