地球物理学（2013年度春学期）（流体地球物理学分野）
最終テスト

注意：計算問題においては計算過程も示すこと。

１．水平面（$x-y$ 平面）上での水の流れを考える。座標軸は、東の方向を $+x$、北の方向を $+y$ と定義する。流速ベクトル $\vec{u}$ は、$\vec{u}=(ax,-ay)$（$a>0$）である。また、初期 $t=0$ において、温度 T は南のほうが高く、温度勾配 ∇T は、$\nabla T=(0,-b)$（$b>0$）である。水じたいが加熱、冷却されることはなく、断熱的である。このとき、以下の問いに答えよ。

（１）温度 T のラグランジュ微分 $\frac{D}{Dt}T$ の値を答えよ。

（２）時刻 $t=0$ における $\vec{u}\bullet\nabla T$ を求めよ（a、b、y を用いて表せ）。

（３）以上の小問の結果を用いて、温度 T の、時刻 $t=0$ におけるオイラー微分 $\frac{\partial}{\partial t}T$ を求めよ。

（４）以上の小問の結果を用いて、温度勾配 ∇T の、時刻 $t=0$ における時間微分（オイラー微分）$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla T\right)$ を求めよ。

２．大気の慣性振動と地衡風に関連した、以下の問いに答えよ。

（１） p 座標（気圧座標）における運動方程式の x 成分（東西成分）と y 成分（南北成分）はそれぞれ、次のように書ける。

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{y,p} + F_x$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{x,p} + F_y$$

F_x、F_y は粘性の効果を表すが、以下では無視する。また、 f はコリオリ係数（ $f > 0$ ）で一定の値をとる。ここで、東西風 u と南北風 v は空間的に一様で、かつ、等圧面上でジオポテンシャル Φ の東西方向の勾配はなく、南北方向の勾配は一定と仮定する。このとき、運動方程式は、

$$\frac{d}{dt}u = fv \qquad ①$$

$$\frac{d}{dt}v = -fu + G \qquad ②$$

と書ける。G は定数（$G > 0$）である。

（１）①、②より、南北風 v のみの（東西風 u を含まない）ひとつの微分方程式を導け。

（２）（１）で求めた方程式から南北風 v を時刻 t の関数として求めよ。ただし、初期条件として、$t = 0$ で、$v = 0$ 、 $\frac{d}{dt}v = G$ とする。

（３）東西風 u を時刻 t の関数として求めよ。

３．連続の式について、以下の問いに答えよ。

（１） p 座標（気圧座標）において、連続の式は、

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial p}=0 \qquad ①$$

と書ける。ただし、u 、v 、ω は風速の x 成分（東西成分)、 y 成分（南北成分)、 p 成分である。ここで、水平発散の鉛直分布を

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=D\cos\left(\pi\frac{p-p_1}{p_2-p_1}\right) \qquad ②$$

と仮定する。ただし、D 、 p_1 、 p_2 は定数であり、$D>0$ 、$0<p_1<p_2$ をみたす。このとき、ω を p の関数として求めよ。ただし、境界条件として、 $p=p_1,p_2$ で $\omega=0$ とする。

（２） $D=1.57\times10^{-4}$ /s 、 $p_1=200$ hPa 、 $p_2=1000$ hPa のとき、 $p=600$hPa における ω の値を求めよ。 ω の単位は hPa/h とし（1h=3600s)、有効数字２けたで答えよ。$\pi=3.14$ とする。ω の符号にも注意せよ。

４．熱力学方程式と温位について、以下の問いに答えよ。

（1）乾燥空気に関して、熱力学の第１法則は、次のように書ける。

$$d'Q = C_v dT + p d\alpha$$

ただし、T、p、α は、それぞれ温度、圧力、比容（密度の逆数）であり、すべて正の値をとる。また、C_v は定積比熱（$C_v > 0$）であり、一定値をとる。したがって、断熱（$d'Q = 0$）という条件のもとでは、

$$C_v dT + p d\alpha = 0 \qquad ①$$

が成り立つ。一方、乾燥空気を理想気体とみなせば、状態方程式は、

$$p\alpha = RT \qquad ②$$

と書ける。ただし、R は気体定数（$R > 0$）であり、一定値をとる。

（1）②を用いて①を書きかえ、C_p、R、T、p、dT、dp で表せ。ただし、C_p は定圧比熱であり、$C_p = C_v + R$ である。

ヒント：はじめに②の両辺を微分せよ。次に①において dT と dp との関係を導け。導出した式に含まれる α は、再び②を用いることによって R、T、p で表せ。

（2）物理量 θ を T と p の関数として

$$\theta = T\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\kappa} \qquad ③$$

と定義する。ただし、κ は定数である。また、p_0 は基準となる圧力であり、これも定数である。θ の微分 $d\theta$ を κ、θ、T、p、dT、dp で（p_0 を含まない形で）表せ。

（3）以上の小問の結果を用いて、断熱という条件のもとで、物理量 θ が保存量になるように κ の値を定め、C_p と R で表せ。