

## 5 熱力学方程式

水のような流体の場合、熱を加えなければ温度は変化しないと思われる。しかし、空気の場合、圧力の変化によって圧縮したり膨張したりするので、断熱圧縮や断熱膨張によって温度が変化することがある。そこで、空気塊の圧力と温度との定量的な関係を論じる。

### 5. 1 理想気体の断熱変化

ここでは、大気が理想気体であることを仮定して、熱力学の第 1 法則を定式化する。理想気体の状態方程式(equation of state)は、圧力を  $p$ 、比容を  $\alpha$ 、温度を  $T$ 、気体定数を  $R$  として、

$$p\alpha = RT \quad (1)$$

と書ける<sup>1</sup>。乾燥空気に対しては  $R = 287 \text{ J/kg K}$  である。熱力学の第 1 法則は、内部エネルギーを  $U$ 、気体に加えた熱を  $d'Q$ 、気体が外部にした仕事を  $d'W$  として、

$$d'Q = dU + d'W \quad (2)$$

と表せる。ここで、熱  $Q$  と仕事  $W$  の微小変化にプライムがついているのは、これらの量が状態量ではない、つまり、始点と終点を指定しただけでは変化量が決まらず、全微分可能ではないからである。(2)で、 $U = C_v T$ 、 $d'W = p d\alpha$  とすると、

$$d'Q = C_v dT + p d\alpha \quad (3)$$

と書ける。ただし、 $C_v$  は乾燥空気の定積比熱である。(1)より、 $RdT = p d\alpha + \alpha dp$  なので、(3)は、

$$d'Q = (C_v + R)dT - \alpha dp = C_p dT - \alpha dp \quad (4)$$

と変形できる。ただし、 $C_p$  は乾燥空気の定圧比熱である。(4)において、 $d'Q = 0$  とすると、

$$C_p dT - \alpha dp = 0$$

$$\frac{dT}{T} - \frac{R}{C_p} \frac{dp}{p} = 0 \quad (5)$$

となる。

### 5. 2 温位

ここで、(5)の両辺を積分すると、

$$\log T - \frac{R}{C_p} \log p = C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad (6)$$

が得られる。両辺の指数をとると、

$$Tp^{\frac{R}{C_p}} = C' \quad (C' \text{ は定数})$$

$$T \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{C_p}} = C'' \quad (p_0, C'' \text{ は積分定数}) \quad (7)$$

となる。つまり、(5)が成り立つ条件のもとでは、(7)の左辺は一定である。そこで、**温位**(potential temperature)  $\theta$  を

$$\theta = T \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{C_p}} \quad (8)$$

と定義すると、 $d\theta = 0$  となる。つまり、 $d'Q = 0$  のもとで  $\theta$  は保存量である。通常、 $p_0 = 1000 \text{ hPa}$  とする。

一般に、(8)において  $\theta$  の微小変化量を計算すると、(4)を用いて、

$$\begin{aligned} d\theta &= \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{C_p}} dT - \frac{RT}{C_p p} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{C_p}} dp = \frac{1}{C_p} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{C_p}} (C_p dT - \alpha dp) \\ &= \frac{1}{C_p} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{C_p}} d'Q \end{aligned} \quad (9)$$

となる。(9)より、

$$\frac{D}{Dt} \theta = \frac{\partial}{\partial t} \theta + \vec{u}_h \cdot \nabla_p \theta + \omega \frac{\partial}{\partial p} \theta = \frac{1}{C_p} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{C_p}} Q \quad (10)$$

### 5. 3 大気鉛直安定度

温位  $\theta$  を用いて、大気の静的安定度を評価することができる。空気塊が断熱的に鉛直方向に運動したときには温位は変化しない。上方に行くほど大気の温位  $\theta$  が高い、つまり、 $\frac{\partial \theta}{\partial p} < 0$  または  $\frac{\partial \theta}{\partial z} > 0$  という状態を考える。断熱的に上方に移動した空気塊の温位は、まわりの空気に比べて低い。したがって、空気塊のほうがまわりの空気より温度が低く、密度が高い。このため、空気塊は下に押し戻されることになる。この場合、大気の成層状態は安定であるといえる。逆に、

上方に行くほど大気の温位  $\theta$  が低い状態であれば、成層状態は不安定である。つまり、乾燥大気の場合、 $\frac{\partial \theta}{\partial p} < 0$  または  $\frac{\partial \theta}{\partial z} > 0$  であれば安定、 $\frac{\partial \theta}{\partial p} > 0$  または  $\frac{\partial \theta}{\partial z} < 0$  であれば不安定である。

高度と温度、温位との関係の例（館野における7月の9時の平年値）

| 気圧<br>[hPa] | 高度<br>[m] | 気温<br>[°C] | 温位<br>[K] |
|-------------|-----------|------------|-----------|
| 1000        | 84        | 23.4       | 296.6     |
| 925         | 760       | 20.1       | 299.9     |
| 850         | 1488      | 17.1       | 304.0     |
| 700         | 3123      | 8.8        | 312.2     |
| 500         | 5834      | -5.8       | 325.9     |
| 400         | 7549      | -15.9      | 334.2     |
| 300         | 9656      | -30.4      | 342.4     |

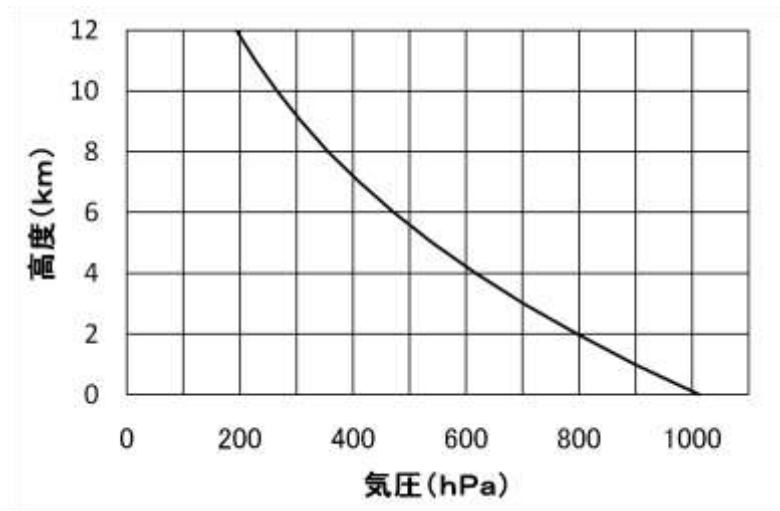
（気象庁のウェブサイトより）

温度は上空に行くほど低くなるが、温位は高くなっていることがわかる。

**課題 5.1** 静水圧平衡が成り立ち、かつ断熱という条件のもとでは、**乾燥静的エネルギー**(dry static energy)  $h_d = C_v T + p\alpha + gz$  が保存することを示せ。なお、 $H = C_v T + p\alpha$  は気体のエンタルピー、 $U = gz$  は位置エネルギーであり、乾燥静的エネルギー  $h_d$  はエンタルピー  $H$  と位置エネルギー  $U$  の和になっている。

ヒント：まず、位置エネルギー  $U$  の微小変化  $dU$  を圧力  $p$  の微小変化  $dp$  で表せ。ただし、静水圧平衡を仮定してよい。次に、エンタルピー  $H$  の微小変化  $dH$  を温度  $T$ 、圧力  $p$ 、比容  $\alpha$  の微小変化  $dT$ 、 $dp$ 、 $d\alpha$  で表せ。さらに、両者の和として  $dh_d$  を計算し、断熱、つまり  $d'Q = C_v dT + p d\alpha = 0$  という条件のもとでは乾燥静的エネルギー  $h_d$  の微小変化  $dh_d$  がゼロであることを示せ。

**課題 5.2** 一般に、上空に行くほど気圧は低くなる。静水圧平衡の関係と理想気体の状態方程式を用いて、気圧  $p$  を高度  $z$  の関数として表せ。気温  $T$  は一定としてよい。また、気圧が  $1/e$  倍に減少する高さを求めよ。この高さのことを**スケールハイト**(scale height)という。



参考：高度と気圧との関係の例

**問 5.1** 気温を  $T = 288 \text{ K}$  で一定と仮定したとき、スケールハイトはどの程度になるか。重力加速度は  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 、気体定数は  $R = 287 \text{ J/kg K}$  とする。課題 5.2 の結果を用いてよい。

**課題 5.3** 一般に、中緯度域の対流圏では上空に行くほど西風が強くなっている。 $p$  座標における静水圧平衡の関係と理想気体の状態方程式に加えて、地衡風平衡の関係をを用いることにより、温度の水平勾配と水平風の鉛直シア（圧力微分）との関係を導け。この関係を**温度風の関係**(thermal wind relationship)という。

ヒント：まず  $p$  座標における静水圧平衡の关系到理想気体の状態方程式を用いて密度  $\rho$  または比容  $\alpha$  を消去せよ。次に密度を消去した静水圧平衡の関係を水平方向に微分し、また、 $p$  座標における地衡風平衡の関係を圧力  $p$  で微分し、両者を比較せよ。

参考：館野における高層気象観測の平年値（9時）

| 1 月         |           |              | 8 月         |           |              |
|-------------|-----------|--------------|-------------|-----------|--------------|
| 気圧<br>[hPa] | 高度<br>[m] | 東西風<br>[m/s] | 気圧<br>[hPa] | 高度<br>[m] | 東西風<br>[m/s] |
| 1000        | 140       | 2            | 1000        | 96        | -1           |
| 925         | 765       | 4            | 925         | 783       | 0            |
| 850         | 1440      | 7            | 850         | 1506      | 2            |
| 700         | 2949      | 15           | 700         | 3145      | 4            |
| 500         | 5457      | 31           | 500         | 5866      | 6            |
| 400         | 7041      | 42           | 400         | 7587      | 7            |
| 300         | 8996      | 55           | 300         | 9697      | 8            |

（気象庁のウェブサイトより）

**問 5.2** 700 hPa 面において、気温の南北勾配を  $1.0 \text{ K}/100 \text{ km}$ （北のほうが低い）としたとき、東西風の鉛直シア（圧力微分）はどの程度になるか。気体定数は  $R = 287 \text{ J/kg K}$ 、コリオリ係数は北緯  $30^\circ$  における値として  $f = 7.2 \times 10^{-5} / \text{s}$  とする。課題 5.3 の結果を用いてよい。さらに、静水圧平衡の関係を用いて、鉛直シアを高度微分として表せ。ただし、700 hPa 面での気温は  $T = 273 \text{ K}$ 、重力加速度は  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  とする。

<sup>1</sup> 物理学では、平均分子量の異なる気体に対して一般に適用できる状態方程式として

$$pV = nR^*T$$

を用いることが多い。ここで、 $R^*$  は普遍気体定数であり、 $R^* = 8.31 \text{ J/mol K}$  である。また、 $V$  は体積、 $n$  は物質量（モル）である。気体の（平均）分子量を  $M$ 、質量を  $m$  とすると、

$$n = \frac{1000m}{M}$$

だから、

$$pV = \frac{1000m}{M} R^*T$$

となる。ここで、比容  $\alpha$  は

$$\alpha = \frac{V}{m}$$

だから、状態方程式の両辺を  $m$  で割って、

$$p\alpha = \frac{1000R^*}{M} T$$

が得られる。気象学では、

$$R = \frac{1000 R^*}{M}$$

を気体定数とよぶことが多い。地球における乾燥大気の平均分子量は  $M = 28.97$  で一定とみなせるので、多くの場合、気体定数をこのように定義したほうが便利である。気体定数  $R$  の値は、 $R = 287 \text{ J/kg K}$  である。