4　連続の式

地上の低気圧の中心付近ではまわりから空気が集まってきて、上昇気流が生じている。質量保存則を考えれば、空気が水平方向に集まってきた分だけ、上昇気流が生じるはずである。質量保存則を用いて、水平流と鉛直流との関係を定量的に表現する。

４．１　高度座標における連続の式

質量保存則の定式化を考える。3 次元空間の中で固定された領域に含まれる空気の質量の時間変化は、その領域を出入りする正味の質量に等しい。まず、この微小な領域 $\delta x \delta y \delta z$ に含まれる空気の質量は $\rho \delta x \delta y \delta z$ と書ける。質量の時間変化は $\dfrac{\delta \rho \delta x \delta y \delta z}{\delta t}$ である。このとき、$-x$ 方向の境界面から領域に入ってくる質量は $\left\{\rho u - \dfrac{1}{2}\delta(\rho u)\right\}\delta y \delta z$ であり、一方、$+x$ 方向の境界面から入ってくる質量は $-\left\{\rho u + \dfrac{1}{2}\delta(\rho u)\right\}\delta y \delta z$ である。y 方向、z 方向の境界面についても同様に考えることができる。ここで、質量の時間変化は質量の出入りの総和に等しいから、

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta \rho \delta x \delta y \delta z}{\delta t} &= \left\{\rho u - \frac{1}{2}\delta(\rho u)\right\}\delta y \delta z - \left\{\rho u + \frac{1}{2}\delta(\rho u)\right\}\delta y \delta z \\
&\quad + \left\{\rho v - \frac{1}{2}\delta(\rho v)\right\}\delta x \delta z - \left\{\rho v + \frac{1}{2}\delta(\rho v)\right\}\delta x \delta z \\
&\quad + \left\{\rho w - \frac{1}{2}\delta(\rho w)\right\}\delta x \delta y - \left\{\rho w + \frac{1}{2}\delta(\rho w)\right\}\delta x \delta y \\
&= -\delta(\rho u)\delta y \delta z - \delta(\rho v)\delta x \delta z - \delta(\rho w)\delta x \delta y
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ゆえに、

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \bullet (\rho \vec{u}) = 0 \tag{2}$$

となる。(2)は、**連続の式**(continuity equation)とよばれ、任意の固定された微小な領域を出入りする質量が、その場所での密度の時間変化に等しいことを示している。(2)を変形して、

$$\frac{D}{Dt}\rho + \rho \nabla \bullet \vec{u} = 0 \tag{3}$$

と書くこともできる。$\nabla \bullet \vec{u}$ は風速ベクトルの発散である。直交座標系において

は、(3)は、

$$\frac{D}{Dt}\rho+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0 \tag{4}$$

と表せる。

４．２　気圧座標における連続の式

次に、微小な体積$\delta x\delta y\delta z$を出入りする質量フラックス（質量の流れ）をp座標において考える。静水圧平衡を仮定すると、

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g \tag{5}$$

だから、

$$\delta z=-\frac{1}{\rho g}\delta p \tag{6}$$

である。したがって、微小体積$\delta x\delta y\delta z$に含まれる質量は、

$$\rho\delta x\delta y\delta z=-\frac{\delta x\delta y\delta p}{g} \tag{7}$$

となり、δpが変化しなければz座標における密度ρに関係なく一定である。このことから、鉛直方向の境界が等圧面で指定された微小体積を出入りする質量の総和は常にゼロであることが分かる。この微小体積の中心における、x方向の質量フラックスは、

$$\rho u\delta y\delta z=-\frac{u}{g}\delta y\delta p \tag{8}$$

である。したがって、この微小体積に$-x$の方向から入ってくる質量は、

$$-\frac{\left(u-\frac{1}{2}\delta u\right)}{g}\delta y\delta p$$

$+x$の方向から入ってくる質量は、

$$\frac{\left(u+\frac{1}{2}\delta u\right)}{g}\delta y\delta p$$

と書ける。y方向についても同様に考えることができる。また、鉛直方向の質量フラックスは、等圧面を横切る流速が$-\dfrac{\omega}{\rho g}$であることを考慮して、

$$\rho\left\{-\frac{\omega}{\rho g}\right\}\delta x\delta y=-\frac{\omega}{g}\delta x\delta y \tag{9}$$

となる。したがって、鉛直下方から入ってくる質量は、

$$-\frac{\left(\omega-\frac{1}{2}\delta\omega\right)}{g}\delta x\delta y$$

上方から入ってくる質量は、

$$\frac{\left(\omega+\frac{1}{2}\delta\omega\right)}{g}\delta x\delta y$$

である。質量の出入りの総和はゼロだから、

$$\begin{aligned}&-\frac{\left(u-\frac{1}{2}\delta u\right)}{g}\delta y\delta p+\frac{\left(u+\frac{1}{2}\delta u\right)}{g}\delta y\delta p-\frac{\left(v-\frac{1}{2}\delta v\right)}{g}\delta x\delta p+\frac{\left(v+\frac{1}{2}\delta v\right)}{g}\delta x\delta p\\&-\frac{\left(\omega-\frac{1}{2}\delta\omega\right)}{g}\delta x\delta y+\frac{\left(\omega+\frac{1}{2}\delta\omega\right)}{g}\delta x\delta y\\&=\frac{1}{g}\left(\delta u\delta y\delta p+\delta v\delta x\delta p+\delta\omega\delta x\delta y\right)\\&=0\end{aligned} \tag{10}$$

ゆえに、

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_p+\frac{\partial\omega}{\partial p}=0 \tag{11}$$

等圧面上での発散を$\nabla_p\bullet\overrightarrow{u_h}$で表せば、(11)は一般的な形として、

$$\nabla_p\bullet\overrightarrow{u_h}+\frac{\partial\omega}{\partial p}=0 \tag{12}$$

と書ける。

４．３　σ座標における連続の式

ここで、σ座標を導入し、地上気圧p_sを用いて$p=p_s\sigma$とすると、

$$\omega=\frac{D}{Dt}(p_s\sigma)=\sigma\left(\frac{\partial p_s}{\partial t}+\overrightarrow{u_h}\bullet\nabla p_s\right)+p_S\dot{\sigma}=0 \tag{13}$$

と書ける。ただし、$\dot{\sigma}$はσ座標における鉛直速度である。(13)を(12)に代入して、

$$\nabla_p\bullet\overrightarrow{u_h}+\frac{\partial\sigma}{\partial p}\left(\frac{\partial p_s}{\partial t}+\overrightarrow{u_h}\bullet\nabla p_s\right)+\sigma\left(\frac{\partial\overrightarrow{u_h}}{\partial p}\right)\bullet\nabla p_s+p_s\frac{\partial\dot{\sigma}}{\partial p}=0 \tag{14}$$

$p=p_s\sigma$より、

$$\frac{\partial}{\partial p} = \frac{1}{p_s}\frac{\partial}{\partial \sigma} \tag{15}$$

なので、

$$\frac{1}{p_s}\left(\frac{\partial p_s}{\partial t} + \overrightarrow{u_h} \bullet \nabla p_s\right) + \nabla_p \bullet \overrightarrow{u_h} + \sigma(\nabla p_s) \bullet \left(\frac{\partial \overrightarrow{u_h}}{\partial p}\right) + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial p} = 0 \tag{16}$$

と変形できる。

$$\nabla_\sigma = \nabla_p + (\nabla_\sigma p)\frac{\partial}{\partial p} = 0 \tag{17}$$

を用いて、

$$\frac{1}{p_s}\left(\frac{\partial p_s}{\partial t} + \overrightarrow{u_h} \bullet \nabla p_s\right) + \nabla_\sigma \bullet \vec{u} + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_s + \nabla_\sigma \bullet \left(p_s \overrightarrow{u_h}\right) + p_s \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0 \tag{18}$$

(18)を$\sigma = 0$から$\sigma = 1$まで鉛直積分すると、$\dot{\sigma} = 0\ (\sigma = 0,1)$を用いて、

$$\frac{\partial}{\partial t} p_s + \int_0^1 \nabla_\sigma \bullet \left(p_s \overrightarrow{u_h}\right) d\sigma = 0 \tag{19}$$

課題 4.1　式(2)から(3)を導出せよ。

問 4.1　ある地点では 5 m/s の西風が吹いている。この地点の東 1 km の地点では 4 m/s の西風、西 1 km の地点では 6 m/s の西風が観測された。このとき、水平風の発散を計算せよ。水平風の南北成分は一様にゼロとする。

問 4.2　問 4.1 の風が、地表から高度 200 m まで鉛直方向に一様に吹いている。3 次元で見た風の収束・発散はゼロであるとして、高度 200 m における鉛直風を求めよ。空気の密度は空間的に一様であると仮定してよい。