**地球物理学（2012 年度春学期）（流体地球物理学分野）**
**最終テスト**

注意：計算問題においては計算過程も示すこと。

１．水平面（$x-y$ 平面）上での水の流れを考える。座標軸は、東の方向を $+x$、北の方向を $+y$ と定義する。水は原点の南側では西向き、北側では東向きに流れていて、流速ベクトル $\vec{u}$ は、$\vec{u}=(ay,0)$（$a>0$）である。また、初期 $t=0$ において、温度 $T$ は東のほうが高く、温度勾配 $\nabla T$ は、$\nabla T=(b,0)$（$b>0$）である。水じたいが加熱、冷却されることはなく、断熱的である。このとき、以下の問いに答えよ。

（１）温度 $T$ のラグランジュ微分 $\dfrac{D}{Dt}T$ を求めよ。

（２）$\vec{u}\bullet\nabla T$ を求めよ（$a$、$b$、$y$ を用いて表せ)。

（３）以上の小問の結果を用いて、温度 $T$ のオイラー微分 $\dfrac{\partial}{\partial t}T$ を求めよ。

（４）$a=0.01\,/\mathrm{s}$、$b=0.02\,\mathrm{K/m}$ とすると、１分後（$t=60\,\mathrm{s}$）における南北温度勾配 $\dfrac{\partial}{\partial y}T$ を求めよ。符号に注意し、有効数字 2 桁で、単位をつけて答えること。

２．温度風の関係について、以下の問いに答えよ。

（１）$p$ 座標（気圧座標）において、運動方程式の $y$ 成分（南北成分）は、

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} + F_y \qquad ①$$

静水圧平衡の関係は、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha \qquad ②$$

理想気体の状態方程式は、

$$p\alpha = RT \qquad ③$$

と書ける。ただし、$u$ 、$v$ は風速の $x$ 成分（東西成分）、$y$ 成分（南北成分）、$\Phi$ はジオポテンシャル、$T$ は温度、$\alpha$ は比容（密度の逆数）である。また、$R$ は気体定数、$f$ はコリオリ係数（$f > 0$）である。①の $F_y$ は粘性の効果を表している。まず、②、③から、$\alpha$ を消去し、$\dfrac{\partial \Phi}{\partial p}$ を $R$ 、$p$ 、$T$ で表せ。

（２）①において、南北風 $v$ は時間、場所に関係なく常にゼロであると仮定し、さらに粘性の効果を無視したうえで、両辺を $p$ で偏微分せよ。

（３）以上の小問の結果を用いて、東西風の鉛直シア $\dfrac{\partial u}{\partial p}$ を $R$ 、$f$ 、$p$ 、$\dfrac{\partial T}{\partial y}$ で表せ。

３．プリミティブ方程式系の運動方程式を応用して、渦度方程式に関する以下の問いに答えよ。

（１）$p$ 座標（気圧座標）における運動方程式の $x$ 成分（東西成分）と $y$ 成分（南北成分）は次のように書ける。

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + F_x$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} + F_y$$

ただし、$u$ 、$v$ 、$\Phi$ は、それぞれ東西風、南北風、ジオポテンシャルである。$F_x$ 、$F_y$ は粘性の効果を表すが、以下では無視してよい。また、$f$ はコリオリ係数であり、時間、場所によらず一定である。ここで、運動量の移流の効果は無視できると仮定して、ラグランジュ微分をオイラー微分に置き換える。このとき、上記の運動方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad ①$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad ②$$

と書ける。①の両辺を $y$ で偏微分せよ。

（２）②の両辺を $x$ で偏微分せよ。

（３）以上の小問の結果を用いて、渦度 $\overset{\text{グザイ}}{\xi} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ の時間変化 $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ を $f$ 、$\frac{\partial u}{\partial x}$ 、$\frac{\partial v}{\partial y}$ で表せ。ここで解答として得られる方程式は、渦度が水平風の収束、発散によって時間変化することを表している。