３　気圧座標

高層天気図を作成するとき、たとえば高度 5500m の天気図の代わりに、500hPa 面の天気図というように、高度の代わりに気圧を高さの基準にしている。基本的には気圧は高度とともに単調減少するので、このような表現が可能になっている。高度の代わりに気圧が使われるのは、観測技術上取り扱いやすいという理由に加え、理論的に取り扱いやすいという理由もある。そこで、高度の代わりに気圧を高さの基準にしたら、どのように方程式が書きかえられるか考える。

３．１　静水圧平衡

　鉛直方向の運動に関して、微小体積$\delta x\delta y\delta z$の流体にはたらく気圧傾度力の鉛直成分、つまり、下面と上面にはたらく気圧の差と、重力とがつりあっていると仮定する。このとき

$$\left(p-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial z}\delta z\right)\delta x\delta y-\left(p+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial z}\delta z\right)\delta x\delta y=\rho g\delta x\delta y\delta z \tag{1}$$

がなりたつ。ゆえに、

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g \tag{2}$$

この関係を**静水圧平衡**という。静水圧平衡のもとでは、気圧 p は高度 z に関して単調減少であり、気圧と高度の間に一対一の対応が成り立つ。したがって、鉛直方向の座標として高度 z の代わりに気圧 p を用いることができる。

３．２　気圧座標における運動方程式

　静水圧平衡の関係を用いると、東西方向の気圧傾度力は、

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y,z}=-\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{x,y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y,p}=\rho g\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y,p} \tag{3}$$

と書くことができる。同様に、南北方向についても、

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{x,z}=-\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{x,y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x,p}=\rho g\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x,p} \tag{4}$$

と表せる。水平方向の運動方程式

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y,z} + F_x \tag{5}$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{x,z} + F_y \tag{6}$$

に(3)、(4)を代入して、

$$\frac{D}{Dt}u = fv - g\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y,p} + F_x \tag{7}$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - g\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x,p} + F_y \tag{8}$$

さらに、重力$\vec{g}$は万有引力と遠心力の合力だから保存力であり、ジオポテンシャルΦを導入して$\vec{g} = -\nabla\Phi$と表せる。z 軸が$\vec{g}$と平行な座標軸として定義されていて、$g = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{x,y}$であることを考慮すると、$\Phi = gz$と定義することができて、

$$g\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y,p} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{y,p} \tag{9}$$

$$g\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x,p} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{x,p} \tag{10}$$

式(9)と(10)を、(7)と(8)に代入して、

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{y,p} + F_x \tag{11}$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{x,p} + F_y \tag{12}$$

気圧座標においては、ラグランジュ微分$\frac{D}{Dt}$は、

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + v\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p + \omega\frac{\partial}{\partial p} \tag{13}$$

と定義される。ω は気圧座標での鉛直速度であって、鉛直 p 速度と呼ばれる。式(11)、(12)は、式(5)、(6)と等価であるが、鉛直座標として高度 z の代わりに気圧 p を用いている点で異なっている。このような座標を**気圧座標**または **p 座標**という。p 座標では下向きが正である。また、水平方向の偏微分は、高度ではなく気圧を一定に保ちながら計算する点に注意が必要である。気象学では、理論上も実用上も鉛直座標として気圧 p を用いたほうが便利であることが多い。このため、p 座標がしばしば用いられる。たとえば、高層天気図を作成するときには、通常は、高度ではなく気圧で高さを指定する。

気圧面とおよその高度

気圧面	およその高度
200hPa	約 12km
300hPa	約 9.5km
500hPa	約 5.5km
700hPa	約 3km
850hPa	約 1.5km

３．３　σ 座標

さらに、地上気圧 p_s を用いて $p = p_s\sigma$ として、大気上端で $\sigma = 0$、地上で $\sigma = 1$ となるような座標系を定義することがある。これを **σ 座標**という。σ 座標においては、p 座標とは異なり、地上では常に $\sigma = 1$ という一定値をとる。

課題 3.1　式(12)と(13)において、地衡風平衡を仮定し、水平風 $\overrightarrow{u_h} = (u, v, 0)$ とジオポテンシャル Φ との関係を導け。地衡風平衡とは、水平方向の気圧傾度力とコリオリ力がつりあった状態のことである。

問 3.1　北緯 30°において、ある気圧面でのジオポテンシャルの南北方向の勾配が 300m²/s²/100 km（北のほうが低い）であるとする。この高度での地衡風の風向・風速を求めよ。ただし、北緯 30°におけるコリオリ係数は $f = 7.2 \times 10^{-5}$ /s とする。また、課題 3.1 の結果を用いてよい。

課題 3.2　p 座標において、静水圧平衡の関係はどのように表されるか。つまり、

静水圧平衡のもとで、$\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial p}\right)_{x,y}$ はどのように表せるか。z 座標での静水圧平衡の関係を既知としてよい。