地球物理学（2011 年度春学期）（流体地球物理学分野）
最終テスト

注意：計算問題においては計算過程も示すこと。

１．水平面（$x-y$ 平面）上での水の流れを考える。水は北西から南東の方向に流れていて、流速ベクトル $\vec{u}$ は（5 m/s，−5 m/s）である。ここで、東の方向を $+x$、北の方向を $+y$ と定義している。温度 T は南のほうが高く、温度勾配の大きさは 0.02 K/m である。また、東西方向には一様である。水じたいが加熱、冷却されることはなく、断熱的である。このとき、以下の問いに答えよ。必要に応じ、単位をつけて答えること。

（１）温度 T のラグランジュ微分 $\dfrac{D}{Dt}T$ の値を答えよ。

（２）$\vec{u} \bullet \nabla T$ の値を求めよ。

（３）以上の小問の結果を用いて、温度 T のオイラー微分 $\dfrac{\partial}{\partial t}T$ の値を求めよ。

２．大気の慣性振動について、以下の問いに答えよ。

（１） p 座標（気圧座標）における運動方程式の x 成分（東西成分）と y 成分（南北成分）はそれぞれ、次のように書ける。

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{y,p} + F_x$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{x,p} + F_y$$

F_x、F_y は粘性の効果を表すが、以下では無視してよい。また、f はコリオリ係数（$f > 0$）である。ここで、東西風 u と南北風 v は空間的に一様で、かつ、等圧面上でジオポテンシャル Φ の勾配がないと仮定したら、上の２つの方程式はそれぞれ、どのように書けるか（答えのみでよい）。なお、東西風 u と南北風 v は時刻 t のみの関数となるので、時間微分は偏微分 $\dfrac{\partial}{\partial t}$ ではなく、常微分 $\dfrac{d}{dt}$ で書いてよい。

（２）（１）で導いた２つの方程式から、u のみの（v を含まない）ひとつの方程式を導け。

（３）（２）で求めた方程式から東西風 u を時刻 t の関数として求めよ。ただし、初期条件として、$t = 0$ で、$u = u_0$（$u_0 > 0$）、$\dfrac{d}{dt}u = 0$ とする。

（４）南北風 v を時刻 t の関数として求めよ。

（５）（３）、（４）で求めた運動の周期は、地球上の北緯 45° の地点では何日か。有効数字１桁で答えよ。コリオリ係数は $f = 2\Omega \sin\phi$（ϕ は緯度）であり、$\dfrac{2\pi}{\Omega}$（Ω は地球の自転角速度）を１日とみなしてよい。

３．温度風の関係について、以下の問いに答えよ。

（１） p 座標（気圧座標）において、温度風の関係は、

$$\frac{\partial}{\partial p}u = \frac{R}{fp}\frac{\partial}{\partial y}T$$

$$\frac{\partial}{\partial p}v = -\frac{R}{fp}\frac{\partial}{\partial x}T$$

のように書ける。ただし、u 、v は地衡風の x 成分（東西成分）、y 成分（南北成分）、T は温度である。また、R は気体定数、f はコリオリ係数（ $f > 0$ ）である。以上の２つの方程式は、ベクトルを用いて、

$$\frac{\partial}{\partial p}\vec{u} = -\frac{R}{fp}\left(\vec{k} \times \nabla T\right)$$

のように、ひとつの方程式で表現することができる。ただし、$\vec{u}$ は水平風ベクトル、∇T は温度の水平勾配、$\vec{k}$ は鉛直方向の単位ベクトルである。この方程式を用いて、$\vec{u} \bullet \nabla T$ を求めよ（$\vec{u}$ 、$\frac{\partial}{\partial p}\vec{u}$ 、p ，R 、f 、$\vec{k}$ で表わせ）。

ヒント：関係式 $\vec{u} \bullet \nabla T = \left(\vec{k} \times \vec{u}\right) \bullet \left(\vec{k} \times \nabla T\right)$ を用いてよい。つまり、$\left(\vec{k} \times \vec{u}\right) \bullet \left(\vec{k} \times \nabla T\right)$ を求めれば、$\vec{u} \bullet \nabla T$ を求めたことになる。

（２）（１）の結果から、温度移流の符号（寒気移流か暖気移動か）と、地衡風の風向の鉛直方向の変化との関係を言葉で述べよ（答えのみでよい）。「寒気移流」、「暖気移流」、「時計回り」、「反時計回り」という４つの言葉を必ず用いること。なお、寒気（暖気）移流とは冷たい（暖かい）空気が流れてくる状態のことである。ベクトル $\vec{k} \times \vec{u}$ がベクトル $\vec{u}$ を水平面上で反時計回りに 90° 回転したベクトルであることに注意せよ。