５　熱力学方程式

水のような流体の場合、熱を加えなければ温度は変化しないと思われる。しかし、空気の場合、圧力の変化によって圧縮したり膨張したりするので、断熱圧縮や断熱膨張によって温度が変化することがある。そこで、空気塊の圧力と温度との関係を定量的に記述してみる。

５．１　理想気体の断熱変化

ここでは、大気が理想気体であることを仮定して、熱力学の第 1 法則を定式化する。理想気体の状態方程式は、圧力を p 、比容を α 、温度を T 、気体定数を R として、

$$p\alpha = RT \tag{1}$$

と書ける。乾燥空気に対しては $R = 287$ J/kg K である。熱力学の第 1 法則は、内部エネルギーを U 、気体に加えた熱を $d'Q$ 、気体が外部にした仕事を $d'W$ として、

$$d'Q = dU + d'W \tag{2}$$

と表せる。ここで、熱 Q と仕事 W の微小変化にプライムがついているのは、これらの量が状態量ではない、つまり、始点と終点を指定しただけでは変化量が決まらず、全微分可能ではないからである。(2)で、$U = C_v T$ 、$d'W = pd\alpha$ とすると、

$$d'Q = C_v dT + pd\alpha \tag{3}$$

と書ける。ただし、C_v は乾燥空気の定積比熱である。(1)より、$RdT = pd\alpha + \alpha dp$ なので、(3)は、

$$d'Q = (C_v + R)dT - \alpha dp = C_p dT - \alpha dp \tag{4}$$

と変形できる。ただし、C_p は乾燥空気の定圧比熱である。(4)において、$d'Q = 0$ とすると、

$$C_p dT - \alpha dp = 0$$

$$\frac{dT}{T} - \frac{R}{C_p}\frac{dp}{p} = 0 \tag{5}$$

となる。

５．２　温位

ここで、(5)の両辺を積分すると、

$$\log T - \frac{R}{C_p}\log p = C \quad (C\text{は積分定数}) \tag{6}$$

が得られる。両辺の指数をとると、

$$Tp^{-\frac{R}{C_p}} = C' \quad (C'\text{は定数})$$

$$T\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}} = C'' \quad (p_0,\ C''\text{は積分定数}) \tag{7}$$

となる。つまり、(5)が成り立つ条件のもとでは、(7)の左辺は一定である。そこで、温位θを

$$\theta = T\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}} \tag{8}$$

と定義すると、$d\theta = 0$となる。つまり、$d'Q = 0$のもとでθは保存量である。通常、p_0＝1000hPa とする。

一般に、(8)においてθの微小変化量を計算すると、(4)を用いて、

$$\begin{aligned} d\theta &= \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}} dT - \frac{RT}{C_p p}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}} dp = \frac{1}{C_p}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}}\left(C_p dT - \alpha dp\right) \\ &= \frac{1}{C_p}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}} d'Q \end{aligned} \tag{9}$$

となる。(9)より、

$$\frac{D}{Dt}\theta = \frac{\partial}{\partial t}\theta + \overrightarrow{u_h} \bullet \nabla_p \theta + \omega\frac{\partial}{\partial p}\theta = \frac{1}{C_p}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}} Q \tag{10}$$

５．３　大気の鉛直安定度

温位θを用いて、大気の静的安定度を評価することができる。空気塊が断熱的に鉛直方向に運動したときには温位は変化しない。上方に行くほど大気の温位θ

が高い、つまり、$\dfrac{\partial\theta}{\partial p}<0$ または $\dfrac{\partial\theta}{\partial z}>0$ という状態を考える。断熱的に上方に移動した空気塊の温位は、まわりの空気に比べて低い。したがって、空気塊のほうがまわりの空気より温度が低く、密度が高い。このため、空気塊は下に押し戻されることになる。この場合、大気の成層状態は安定であるといえる。逆に、上方に行くほど大気の温位 θ が低い状態であれば、成層状態は不安定である。つまり、乾燥大気の場合、$\dfrac{\partial\theta}{\partial p}<0$ または $\dfrac{\partial\theta}{\partial z}>0$ であれば安定、$\dfrac{\partial\theta}{\partial p}>0$ または $\dfrac{\partial\theta}{\partial z}<0$ であれば不安定である。

課題 5.1　静水圧平衡が成り立ち、かつ断熱という条件のもとでは、**乾燥静的エネルギー** $h_d = C_v T + p\alpha + gz$ が保存することを示せ。なお、$H = C_v T + p\alpha$ は気体のエンタルピー、$U = gz$ は位置エネルギーであり、乾燥静的エネルギー h_d はエンタルピー H と位置エネルギー U の和になっている。

ヒント：まず、位置エネルギー U の微小変化 dU を圧力 p の微小変化 dp で表せ。ただし、静水圧平衡を仮定してよい。次に、エンタルピー H の微小変化 dH を温度 T、圧力 p、比容 α の微小変化 dT、dp、$d\alpha$ で表せ。さらに、両者の和として dh_d を計算し、断熱、つまり $d'Q = C_v dT + p d\alpha = 0$ という条件のもとでは乾燥静的エネルギー h_d の微小変化 dh_d がゼロであることを示せ。

課題 5.2　静水圧平衡の関係と理想気体の状態方程式を用いて、気圧 p を高度 z の関数をして表せ。気温 T は一定としてよい。また、気圧が $1/e$ 倍に減少する高さを求めよ。この高さのことを**スケールハイト**という。

問 5.1　気温を $T = 288$ K で一定と仮定したとき、スケールハイトはどの程度になるか。重力加速度は $g = 9.8$ m/s^2、気体定数は $R = 287$ J/kg K とする。課題 5.2 の結果を用いてよい。

課題 5.3　p 座標における静水圧平衡の関係と理想気体の状態方程式に加えて、地衡風平衡の関係を用いることにより、温度の水平勾配と水平風の鉛直シア（圧力微分）との関係を導け。この関係を**温度風の関係**という。

ヒント：まず p 座標における静水圧平衡の関係に理想気体の状態方程式を用いて密度 ρ または比容 α を消去せよ。次に密度を消去した静水圧平衡の関係式を水平方向に微分し、また、地衡風平衡の関係式を圧力 p で微分し、両者を比較せよ。

問 5.2　700 hPa 面において、気温の南北勾配を1.0 K/100 km （北のほうが低い）としたとき、東西風の鉛直シア（圧力微分）はどの程度になるか。気体定数は $R = 287$ J/kg K 、コリオリ係数は北緯 30° における値として $f = 7.2\times10^{-5}$ /s とする。課題 5.3 の結果を用いてよい。さらに、静水圧平衡の関係を用いて、鉛直シアを高度微分として表せ。ただし、700 hPa 面での気温は $T = 273$K 、重力加速度は $g = 9.8$ m/s^2 とする。