５　熱力学方程式

ここでは、大気が理想気体であることを仮定して、熱力学の第 1 法則を定式化する。理想気体の状態方程式は、圧力を p 、比容を α 、温度を T 、気体定数を R として、

$$p\alpha = RT \tag{1}$$

と書ける。乾燥空気に対しては $R = 287$ J/kg K である。熱力学の第 1 法則は、内部エネルギーを U 、気体に加えた熱を $d'Q$ 、気体が外部にした仕事を $d'W$ として、

$$d'Q = dU + d'W \tag{2}$$

と表せる。ここで、熱 Q と仕事 W の微小変化にプライムがついているのは、これらの量が状態量ではない、つまり、始点と終点を指定しただけでは変化量が決まらず、全微分可能ではないからである。(2)で、$U = C_v T$ 、$d'W = pd\alpha$ とすると、

$$d'Q = C_v dT + pd\alpha \tag{3}$$

と書ける。ただし、C_v は乾燥空気の定積比熱である。(1)より、$RdT = pd\alpha + \alpha dp$ なので、(3)は、

$$d'Q = (C_v + R)dT + \alpha dp = C_p dT - \alpha dp \tag{4}$$

と変形できる。ただし、C_p は乾燥空気の定圧比熱である。(4)において、$d'Q = 0$ とすると、

$$C_p dT - \alpha dp = 0$$

$$\frac{dT}{T} - \frac{R}{C_p}\frac{dp}{p} = 0 \tag{5}$$

となる。

ここで、温位 θ を

$$\theta = T\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}} \tag{6}$$

と定義すると、(5)が成り立つ条件のもとでは $d\theta = 0$ となる。つまり、$d'Q = 0$ の

もとでθは保存量である。

一般に、(6)においてθの微小変化量を計算すると、(4)を用いて、

$$
\begin{aligned}
d\theta &= \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}} dT - \frac{RT}{C_p p}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}} dp = \frac{1}{C_p}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}} \left(C_p dT - \alpha dp\right) \\
&= \frac{1}{C_p}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}} d'Q
\end{aligned}
\tag{7}
$$

となる。(7)より、

$$
\frac{D}{Dt}\theta = \frac{\partial}{\partial t}\theta + \overrightarrow{u_h} \bullet \nabla_p \theta + \omega \frac{\partial}{\partial p}\theta = \frac{1}{C_p}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}} Q \tag{8}
$$

温位θを用いて、大気の静的安定度を評価することができる。乾燥大気の場合、$\frac{\partial \theta}{\partial p} < 0$または$\frac{\partial \theta}{\partial z} > 0$であれば安定、$\frac{\partial \theta}{\partial p} > 0$または$\frac{\partial \theta}{\partial z} < 0$であれば不安定である。

課題 5.1　静水圧平衡が成り立ち、かつ断熱という条件のもとでは、**乾燥静的エネルギー**$h_d = C_v T + p\alpha + gz$が保存することを示せ。なお、$H = C_v T + p\alpha$は気体のエンタルピー、$U = gz$は位置エネルギーであり、乾燥静的エネルギー$h_d$はエンタルピー$H$と位置エネルギー$U$の和になっている。

ヒント：まず、位置エネルギーUの微小変化dUを圧力pの微小変化dpで表せ。ただし、静水圧平衡を仮定してよい。次に、エンタルピーHの微小変化dHを温度T、圧力p、比容αの微小変化dT、dp、$d\alpha$で表せ。さらに、両者の和としてdh_dを計算し、断熱、つまり$d'Q = C_v dT + p d\alpha = 0$という条件のもとでは乾燥静的エネルギー$h_d$の微小変化$dh_d$がゼロであることを示せ。

課題 5.2　静水圧平衡の関係と気体の状態方程式を用いて、気圧pを高度zの関数をして表せ。気温Tは一定としてよい。また、気圧が$1/e$倍に減少する高さを求めよ。この高さのことを**スケールハイト**という。

問 5.1　気温を$T = 288$ K で一定と仮定したとき、スケールハイトはどの程度になるか。重力加速度は$g = 9.8$ m/s^2、気体定数は$R = 287$ J/kg K とする。課題 5.2 の結果を用いてよい。

課題 5.3　p 座標における静水圧平衡の関係と気体の状態方程式に加えて、地衡風平衡の関係を用いることにより、温度の水平勾配と水平風の鉛直シア（圧力微分）との関係を導け。この関係を**温度風の関係**という。

ヒント：まず p 座標における静水圧平衡の関係に気体の状態方程式を用いて密度ρまたは比容αを消去せよ。次に密度を消去した静水圧平衡の関係式を水平方向に微分し、また、地衡風平衡の関係式を圧力 p で微分し、両者を比較せよ。

問 5.2　700 hPa 面において、気温の南北勾配を1.0 K/100 km（北のほうが低い）としたとき、東西風の鉛直シア（圧力微分）はどの程度になるか。気体定数は$R = 287$ J/kg K、コリオリ係数は北緯 30°における値として $f = 7.2\times10^{-5}$ /s とする。課題 5.3 の結果を用いてよい。さらに、静水圧平衡の関係を用いて、鉛直シアを高度微分として表せ。ただし、重力加速度は$g = 9.8$ m/s^2 とする。