

4 連続の式

ここでは、質量保存則を定式化する。3次元空間の中で固定された領域に含まれる空気の質量の時間変化は、その領域を出入りする正味の質量に等しい。まず、この領域 $\delta x \delta y \delta z$ に含まれる空気の質量は $\rho \delta x \delta y \delta z$ と書ける。質量の時間変化は $\frac{\delta \rho \delta x \delta y \delta z}{\delta t}$ である。一方、 $-x$ 方向の境界面から領域に入ってくる質量は $\rho u \delta y \delta z$ 、 $+x$ 方向の境界面から入ってくる質量は $-\{\rho u + \delta(\rho u)\} \delta y \delta z$ である。 y 方向、 z 方向の境界面についても同様に考えることができる。ここで、質量の時間変化は質量の出入りの総和に等しいから、

$$\begin{aligned} \frac{\delta \rho \delta x \delta y \delta z}{\delta t} &= \rho u \delta y \delta z - \{\rho u + \delta(\rho u)\} \delta y \delta z \\ &\quad + \rho v \delta x \delta z - \{\rho v + \delta(\rho v)\} \delta x \delta z \\ &\quad + \rho w \delta x \delta y - \{\rho w + \delta(\rho w)\} \delta x \delta y \\ &= -\delta(\rho u) \delta y \delta z - \delta(\rho v) \delta x \delta z - \delta(\rho w) \delta x \delta y \end{aligned} \quad (1)$$

ゆえに、

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (2)$$

となる。(2)は、任意の固定された微小な領域を出入りする質量が、その場所でその密度の時間変化に等しいことを示している。(2)を変形して、

$$\frac{D}{Dt} \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (3)$$

と書くこともできる。直交座標系においては、(3)は、

$$\frac{D}{Dt} \rho + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (4)$$

と表せる。

次に、微小な体積 $\delta x \delta y \delta z$ を出入りする質量フラックスを p 座標において考える。静水圧平衡を仮定すると、

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (5)$$

だから、

$$\delta z = -\frac{1}{\rho g} \delta p \quad (6)$$

である。したがって、微小体積 $\delta x \delta y \delta z$ に含まれる質量は、

$$\rho \delta x \delta y \delta z = -\frac{\delta x \delta y \delta p}{g} \quad (7)$$

となり、 δp が変化しなければ z 座標における密度 ρ に関係なく一定である。このことから、鉛直方向の境界が等圧面で指定された微小体積を出入りする質量の総和は常にゼロであることが分かる。この微小体積に $-x$ の方向から入ってくる、 x 方向の質量の流れは、

$$\rho u \delta y \delta z = -\frac{u}{g} \delta y \delta p \quad (8)$$

$-y$ の方向から入ってくる y 方向の質量の流れは、

$$\rho v \delta x \delta z = -\frac{v}{g} \delta x \delta p \quad (9)$$

である。鉛直下方から入ってくる、鉛直方向の質量の流れは、等圧面を横切る流速が $-\frac{\omega}{\rho g}$ であることを考慮して、

$$\rho \left(-\frac{\omega}{\rho g} \right) \delta x \delta y = -\frac{\omega}{g} \delta x \delta y \quad (10)$$

となる。質量の出入りの総和はゼロだから、

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{u}{g} \delta y \delta p \right) - \left(-\frac{(u+\delta u)}{g} \delta y \delta p \right) + \left(-\frac{v}{g} \delta x \delta p \right) - \left(-\frac{(v+\delta v)}{g} \delta x \delta p \right) \\ & + \left(-\frac{\omega}{g} \delta x \delta y \right) - \left(-\frac{(\omega+\delta\omega)}{g} \delta x \delta y \right) \\ & = \frac{1}{g} (\delta u \delta y \delta p + \delta v \delta x \delta p + \delta \omega \delta x \delta y) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

ゆえに、

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_p + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_p + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (12)$$

等圧面上での発散を $\nabla_p \cdot \vec{u}_h$ で表せば、(12)は一般的な形として、

$$\nabla_p \cdot \vec{u}_h + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (13)$$

と書ける。

ここで、 σ 座標を導入し、地上気圧 p_s を用いて $p = p_s \sigma$ とすると、

$$\omega = \frac{D}{Dt}(p_s \sigma) = \sigma \left(\frac{\partial p_s}{\partial t} + \vec{u}_h \cdot \nabla p_s \right) + p_s \dot{\sigma} = 0 \quad (14)$$

と書ける。ただし、 $\dot{\sigma}$ は σ 座標における鉛直速度である。(14)を(13)に代入して、

$$\nabla_p \cdot \vec{u}_h + \frac{\partial \sigma}{\partial p} \left(\frac{\partial p_s}{\partial t} + \vec{u}_h \cdot \nabla p_s \right) + \sigma \left(\frac{\partial \vec{u}_h}{\partial p} \right) \cdot \nabla p_s + p_s \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial p} = 0 \quad (15)$$

$p = p_s \sigma$ より、

$$\frac{\partial}{\partial p} = \frac{1}{p_s} \frac{\partial}{\partial \sigma} \quad (16)$$

なので、

$$\frac{1}{p_s} \left(\frac{\partial p_s}{\partial t} + \vec{u}_h \cdot \nabla p_s \right) + \nabla_p \cdot \vec{u}_h + \sigma (\nabla p_s) \cdot \left(\frac{\partial \vec{u}_h}{\partial p} \right) + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial p} = 0 \quad (17)$$

と変形できる。

$$\nabla_\sigma = \nabla_p + (\nabla_\sigma p) \frac{\partial}{\partial p} = 0 \quad (18)$$

を用いて、

$$\frac{1}{p_s} \left(\frac{\partial p_s}{\partial t} + \vec{u}_h \cdot \nabla p_s \right) + \nabla_\sigma \cdot \vec{u} + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_s + \nabla_\sigma \cdot (p_s \vec{u}_h) + p_s \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0 \quad (19)$$

(19)を $\sigma = 0$ から $\sigma = 1$ まで鉛直積分すると、 $\dot{\sigma} = 0$ ($\sigma = 0, 1$)を用いて、

$$\frac{\partial}{\partial t} p_s + \int_0^1 \nabla_\sigma \cdot (p_s \vec{u}_h) d\sigma = 0 \quad (20)$$

課題 4.1 式(2)から(3)を導出せよ。

問 4.1 ある地点では 5 m/s の西風が吹いている。この地点の東 1 km の地点では 4 m/s の西風、西 1 km の地点では 6 m/s の西風が観測された。このとき、水平風の発散を計算せよ。水平風の南北成分は一様にゼロとする。

問 4.2 問 4.1 の風が、地表から高度 200 m まで鉛直方向に一様に吹いている。3次元で見た風の収束・発散はゼロであるとして、高度 200 m における鉛直風を求めよ。空気の密度は空間的に一様であると仮定してよい。