3　気圧座標

鉛直方向の運動に関して、微小体積の流体にはたらく気圧傾度力、つまり、下面と上面にはたらく気圧の差と、重力とがつりあっていると仮定する。このとき

$$p\delta x\delta y-\left(p+\frac{\partial p}{\partial z}\delta z\right)\delta x\delta y=\rho g\delta x\delta y\delta z \tag{1}$$

がなりたつ。ゆえに、

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g \tag{2}$$

この関係を**静水圧平衡**という。静水圧平衡のもとでは、気圧 p は高度 z に関して単調減少であり、気圧と高度の間に一対一の対応が成り立つ。したがって、鉛直方向の座標として高度 z の代わりに気圧 p を用いることができる。

まず、東西方向の気圧傾度力は、

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y,z}=-\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{x,y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y,p}=\rho g\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y,p} \tag{3}$$

と書くことができる。同様に、南北方向についても、

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{x,z}=-\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{x,y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x,p}=\rho g\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x,p} \tag{4}$$

と表せる。水平方向の運動方程式

$$\frac{D}{Dt}u=fv-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y,z}+F_x \tag{5}$$

$$\frac{D}{Dt}v=-fu-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{x,z}+F_y \tag{6}$$

に(3)、(4)を代入して、

$$\frac{D}{Dt}u=fv-g\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y,p}+F_x \tag{7}$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - g\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x,p} + F_y \tag{8}$$

さらに、重力$\vec{g}$は万有引力と遠心力の合力だから保存力であり、ジオポテンシャルΦを導入して$\vec{g} = -\nabla\Phi$と表せる。z 軸が$\vec{g}$と平行な座標軸として定義されていて、$g = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{x,y}$であることを考慮すると、$\Phi = gz$と定義することができて、

$$g\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y,p} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{y,p} \tag{9}$$

$$g\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x,p} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{x,p} \tag{10}$$

式(9)と(10)を、(7)と(8)に代入して、

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{y,p} + F_x \tag{11}$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{x,p} + F_y \tag{12}$$

気圧座標においては、ラグランジュ微分$\frac{D}{Dt}$は、

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + v\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p + \omega\frac{\partial}{\partial p} \tag{13}$$

と定義される。ωは気圧座標での鉛直速度であって、鉛直p速度と呼ばれる。式(11)、(12)は、式(5)、(6)と等価であるが、鉛直座標として高度zの代わりに気圧pを用いている点で異なっている。このような座標を**気圧座標**または ***p* 座標**という。p座標では下向きが正である。また、水平方向の偏微分は、高度ではなく気圧を一定に保ちながら計算する点に注意が必要である。気象学では、理論上も実用上も鉛直座標として気圧pを用いたほうが便利であることが多い。このため、p座標がしばしば用いられる。

さらに、地上気圧 p_s を用いて $p = p_s\sigma$ として、大気上端で $\sigma = 0$ 、地上で $\sigma = 1$ となるような座標系を定義することがある。これを **σ座標**という。σ 座標においては、 p 座標とは異なり、地上では常に $\sigma = 1$ で一定値となる。

課題 3.1　式(12)と(13)において、地衡風平衡を仮定し、水平風 $\overrightarrow{u_h} = (u, v, 0)$ とジオポテンシャル Φ との関係を導け。

問 3.1　北緯 30°において、ある気圧面でのジオポテンシャルの南北方向の勾配が 300m²/s²/100 km（北のほうが低い）であるとする。この高度での地衡風の風向・風速を求めよ。ただし、北緯 30°におけるコリオリ係数は $f = 7.2\times10^{-5}$ /s とする。また、課題 3.1 の結果を用いてよい。

課題 3.2　p 座標において、静水圧平衡の関係はどのように表されるか。つまり、静水圧平衡のもとで、$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)_{x,y}$ はどのように表せるか。