２　回転系における運動方程式

慣性系におけるナビエ・ストークスの方程式は、

$$\frac{D}{Dt}\vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{u} \tag{1}$$

と書ける。以下、回転系 R における演算子や物理量を添え字 $_R$ であらわすことにして、回転系におけるラグランジュ微分 $\frac{D_R}{Dt}$ を考える。座標のとりかたに依存しないスカラー量であれば、$\frac{D_R}{Dt}$ と $\frac{D}{Dt}$ は等しい。しかし、ベクトル量 $\vec{q}$ の物質微分においては、座標系の回転を考慮して、

$$\frac{D}{Dt}\vec{q} = \left(\frac{D_R}{Dt} + \vec{\Omega}\times\right)\overrightarrow{q_R} \tag{2}$$

となる。ただし、$\vec{\Omega}$ は回転系の自転の角速度ベクトルである。このとき、速度ベクトル $\vec{u}$ の物質微分は、

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}\vec{u} &= \frac{D}{Dt}\left(\frac{D}{Dt}\vec{r}\right) = \left(\frac{D_R}{Dt} + \vec{\Omega}\times\right)\left(\frac{D_R}{Dt} + \vec{\Omega}\times\right)\overrightarrow{r_R} \\ &= \frac{D_R}{Dt}\overrightarrow{u_R} + 2\vec{\Omega}\times\overrightarrow{u_R} + \vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\overrightarrow{r_R}\right) \\ &= \frac{D_R}{Dt}\overrightarrow{u_R} + 2\vec{\Omega}\times\overrightarrow{u_R} - \Omega^2\overrightarrow{r_R} + \left(\vec{\Omega}\bullet\overrightarrow{r_R}\right)\vec{\Omega} \\ &= \frac{D_R}{Dt}\overrightarrow{u_R} + 2\vec{\Omega}\times\overrightarrow{u_R} - \Omega^2\overrightarrow{\hat{r}_R}\end{aligned} \tag{3}$$

となる。ただし、Ω は回転系の自転の角速度であって、ベクトル $\overrightarrow{\hat{r}_R}$ を

$$\overrightarrow{\hat{r}_R} = \overrightarrow{r_R} - \frac{\left(\vec{\Omega}\bullet\overrightarrow{r_R}\right)}{\Omega^2}\vec{\Omega} \tag{4}$$

と定義した。ベクトル $\overrightarrow{\hat{r}_R}$ は $\overrightarrow{r_R}$ から $\vec{\Omega}$ に平行な成分を差し引いたベクトルである。

式(3)を(1)に代入すると、

$$\frac{D_R}{Dt}\overrightarrow{u_R} = -2\vec{\Omega}\times\overrightarrow{u_R} + \Omega^2\overrightarrow{\hat{r}_R} + \vec{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\overrightarrow{u_R} \tag{5}$$

$\overrightarrow{g_R} = \vec{g} + \Omega^2 \overrightarrow{\hat{r}_R}$ とすると、

$$\frac{D_R}{Dt}\overrightarrow{u_R} = -2\vec{\Omega} \times \overrightarrow{u_R} + \overrightarrow{g_R} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2 \overrightarrow{u_R} \tag{6}$$

添え字 $_R$ を消去して、

$$\frac{D}{Dt}\vec{u} = -2\vec{\Omega} \times \vec{u} + \vec{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2 \vec{u} \tag{7}$$

これが回転系におけるナビエ・ストークスの方程式である。

ここで、観測点における局所直交座標系を導入する。東西方向、南北方向、鉛直方向の基本ベクトルをそれぞれ、$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ とすると、

$$\vec{u} = \vec{i}u + \vec{j}v + \vec{k}w \tag{8}$$

なので、

$$\frac{D}{Dt}\vec{u} = \vec{i}\frac{D}{Dt}u + \vec{j}\frac{D}{Dt}v + \vec{k}\frac{D}{Dt}w \tag{9}$$

また、

$$\vec{\Omega} = \vec{j}\Omega\cos\phi + \vec{k}\Omega\sin\phi \tag{10}$$

ただし、ϕ は緯度である。地球の大気の運動を考えるうえでは、自転のうち水平面内での回転、つまり自転角速度ベクトル $\vec{\Omega}$ の鉛直成分が重要であるから、(7) の $\vec{\Omega}$ を

$$\vec{\Omega}^* = \vec{k}\Omega\sin\phi \tag{11}$$

に置き換えると、

$$\frac{D}{Dt}\vec{u} = -(2\Omega\sin\phi)\vec{k} \times \vec{u} + \vec{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2 \vec{u} \tag{12}$$

各成分を分けて書けば、

$$\frac{D}{Dt}u = 2\Omega v\sin\phi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}p + \nu\nabla^2 u \tag{13}$$

$$\frac{D}{Dt}v = -2\Omega u\sin\phi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}p + \nu\nabla^2 v \tag{14}$$

$$\frac{D}{Dt}w = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}p + \nu\nabla^2 w \tag{15}$$

となる。(13)と(14)において、

$$f = 2\Omega\sin\phi \tag{16}$$

とおき、さらに、(13)、(14)、(15)の粘性項をそれぞれF_x、F_y、F_zと書くと、

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}p + F_x \tag{17}$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}p + F_y \tag{18}$$

$$\frac{D}{Dt}w = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}p + F_z \tag{19}$$

と書くことができる[1]。ここでfは**コリオリ係数**である。

課題 2.1　式(17)と(18)において、水平風$\overrightarrow{u_h}$が$\overrightarrow{u_h} = (u, v, 0)$であり、空間的に一様で時間変化しないと仮定したとき、$\overrightarrow{u_h}$と圧力pの間にはどのような関係式が成り立つか。$\overrightarrow{u_h}$が空間的に一様で時間変化しないと仮定したことにより、$\overrightarrow{u_h}$の物質微分と粘性項を消去できることに注意せよ。

- この関係を**地衡風平衡**といい、水平方向の気圧傾度力とコリオリ力がつりあった状態を表している。

問 2.1　北緯 30°において、ある高度での南北方向の気圧勾配が 1.0 hPa/100 km（北のほうが低い）、空気の密度が 1.0 kg/m^{3}であるとする。北緯 30°におけるコリオリ係数を$f = 7.2\times10^{-5}$ /sとして、この高度での東西風uの値を求めよ。ただし、地衡風平衡を仮定し、課題 2.1 の結果を用いてよい。

課題 2.2　式(17)と(18)において、空間的に一様な場を仮定すると、水平風の場$\overrightarrow{u_h} = (u, v, 0)$はどのように時間変化するか。数式で示し、さらに図示せよ。空間的に一様な場を仮定することにより、移流項と気圧傾度力、粘性項を消去できることに注意せよ。

- このような運動を**慣性振動**という。

[1]厳密には、角運動量とエネルギーの保存を考慮すると、(17)、(18)に代えて、以下のような式が得られる。

$$\frac{D}{Dt}u = 2\Omega v \sin\phi + \frac{uv}{a}\tan\phi - \frac{1}{\rho}\frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}p + F_x$$

$$\frac{D}{Dt}v = -2\Omega u \sin\phi - \frac{u^2}{a}\tan\phi - \frac{1}{\rho}\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\phi}p + F_y$$

ただし、λ は経度、a は地球半径である。導出はかなり複雑であるため、ここでは省略する。数値シミュレーションでは、この部分を厳密に取り扱わないと、角運動量やエネルギーが保存しないために計算が実際に破綻することがある。