地球物理学（2025 年度春学期）（流体地球物理学分野）
期末試験

注意：計算問題においては計算過程も示すこと。

１．ある海域において、固定された観測点 A で海面付近の水温を観測したところ、水温は時間変化せず一定であった。一方、この海域では、1 m/s の海流が観測された。また、観測点 A 周辺の海面付近の水温の水平分布を調べたところ、海流の上流側のほうが水温が高く、下流側から上流側に向かって 100 km につき 0.2 K の割合で水温が上昇していた。この海域での水温の水平勾配 ∇T や流速ベクトル $\vec{u}$ は一様であり、また、鉛直流はゼロであるとして、以下の問いに答えよ。国際単位系（たとえば、温度の単位は K、時間の単位は s である）に従い、適切な単位を付して解答すること。（１）は結果のみを記せばよい。

（１）観測点 A における水温 T のオイラー微分 $\dfrac{\partial}{\partial t}T$ の値を答えよ。

（２）観測点 A における $\vec{u} \bullet \nabla T$ の値を計算し、<u>有効数字１けた</u>で答えよ。符号に注意して解答せよ。

（３）以上の小問の結果を用いて、観測点 A における水温 T のラグランジュ微分 $\dfrac{D}{Dt}T$ の値を求め、<u>有効数字１けた</u>で答えよ。符号に注意して解答せよ。

２．大気の慣性振動と地衡風について、以下の問いに答えよ。

地面との摩擦が効かない自由大気では、気圧座標（p 座標）における運動方程式の x 成分（東西成分）と y 成分（南北成分）は、それぞれ次のように書ける。

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad ①$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \qquad ②$$

ただし、u は東西風、v は南北風、Φ はジオポテンシャルである。また、f はコリオリ係数（$f>0$）で一定の値をとる。以下、鉛直流はゼロとし、特定の等圧面内で大気の運動を考える。

（１）①、②において、東西風 u と南北風 v は空間的に一様で、かつ、ジオポテンシャル Φ の東西方向の勾配はなく、南北方向の勾配は一定と仮定する。このとき、①、②は

$$\frac{d}{dt}u = fv \qquad ③$$

$$\frac{d}{dt}v = -fu + G \qquad ④$$

と書ける。G は定数であり、本問では、$G>0$ とする。③、④より、南北風 v のみの（東西風 u を含まない）ひとつの微分方程式を導け。

ヒント：まず、④を時刻 t で微分せよ。

（２）（１）で求めた方程式から南北風 v を時刻 t の関数として求めよ。ただし、初期条件として、$t=0$ で静止、つまり、$u=0$、$v=0$ とする。④において、$u=0$ のとき、$\frac{d}{dt}v = G$ であることに注意せよ。

（３）東西風 u を時刻 t の関数として求めよ。

３．連続の式について、以下の問いに答えよ。

局地的に地表面の温度が高くなると、大気境界層とよばれる対流圏の下部の大気が加熱され、大気境界層内での水平風の収束や、大気境界層上端での上昇流が生じる。本問では、連続の式を用いて、水平風の収束から鉛直風速を見積もってみよう。

気圧座標（ p 座標）において、連続の式は、

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial p}=0 \qquad ①$$

と書ける。ただし、u 、v 、ω はそれぞれ風速の x 成分（東西成分）、y 成分（南北成分）、 p 成分である。

（１）1000 hPa 面で $\omega=0$ であり、950 hPa 面から 1000 hPa 面までの水平発散 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$ の平均値は -9.8×10^{-6} /s であるとする。950 hPa 面における ω の値を求めよ。単位は Pa/s、有効数字２けたで答えよ。符号に注意して解答せよ。

（２）一般に、通常の高度座標（z 座標）でみた上昇流 w と鉛直 p 速度 ω との関係は、

$$w = \frac{Dz}{Dt} = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p + \frac{\partial z}{\partial p}\frac{Dp}{Dt} = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p + \omega\frac{\partial z}{\partial p}$$

と書ける。等圧面高度が時間変化しない場合には、

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p = 0$$

だから

$$w = \omega\frac{\partial z}{\partial p} \qquad ②$$

となる。また、静水圧平衡の関係は、

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

と書ける。ただし、ρ は密度、g は重力加速度であり、$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ とする。この関係式は、逆関数の微分の公式より、

$$\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{1}{\rho g} = -\frac{\alpha}{g} \qquad ③$$

と書きかえられる。ここで、α は比容（密度の逆数）であり、950 hPa 面では $\alpha = 0.90\ \mathrm{m^3/kg}$ とする。950 hPa 面高度が時間変化しない場合、z 座標でみた、950 hPa 面での上昇流 w の値を、②、③を用いて計算せよ。ただし、上向きを正、単位は m/s とし、有効数字２けたで答えよ。

４．熱力学方程式と、乾燥断熱減率、温位について、以下の問いに答えよ。

乾燥空気に関して、熱力学の第１法則は、次のように書ける。

$$d'Q = C_v dT + p d\alpha$$

ただし、T 、 p 、 α は、それぞれ温度、圧力、比容（密度 ρ の逆数）であり、すべて正の値をとる。また、C_v は定積比熱（$C_v > 0$）であり、一定値をとる。ここで、断熱（$d'Q = 0$）という条件のもとでは、

$$C_v dT + p d\alpha = 0 \qquad ①$$

が成り立つ。一方、乾燥空気を理想気体とみなせば、状態方程式は、

$$p\alpha = RT \qquad ②$$

と書ける。ただし、R は気体定数（$R > 0$）であり、一定値をとる。②の両辺を微分すると、

$$p d\alpha + \alpha dp = R dT$$

が得られる。これを①に代入すると、

$$C_v dT + R dT - \alpha dp = 0$$

$$C_p dT - \alpha dp = 0 \qquad ③$$

となる。ただし、C_p は定圧比熱であり、$C_p = C_v + R$ である。

（１）静水圧平衡より、

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \qquad ④$$

が成り立つ。ただし、g は重力加速度である。③と④を用いて、$\dfrac{dT}{dz}$ を C_p と g で表せ。符号に注意して解答せよ。

（2）物理量θをTとpの関数として

$$\theta = T\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\kappa} \qquad ⑤$$

と定義する。ただし、κは定数である。また、p_0は基準となる圧力であり、これも定数である。このとき、θの微分$d\theta$は

$$d\theta = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\kappa} dT + \frac{T\kappa}{p}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\kappa} dp = \theta\left(\frac{1}{T}dT + \frac{\kappa}{p}dp\right) \qquad ⑥$$

と書ける。一方、②と③より、断熱という条件のもとでは、

$$C_p dT - \frac{RT}{p}dp = 0 \qquad ⑦$$

が成り立つ。⑥と⑦を比べることによって、断熱という条件のもとで物理量θが保存量になるようにκの値を定め、C_pとRで表せ。符号に注意して解答せよ。