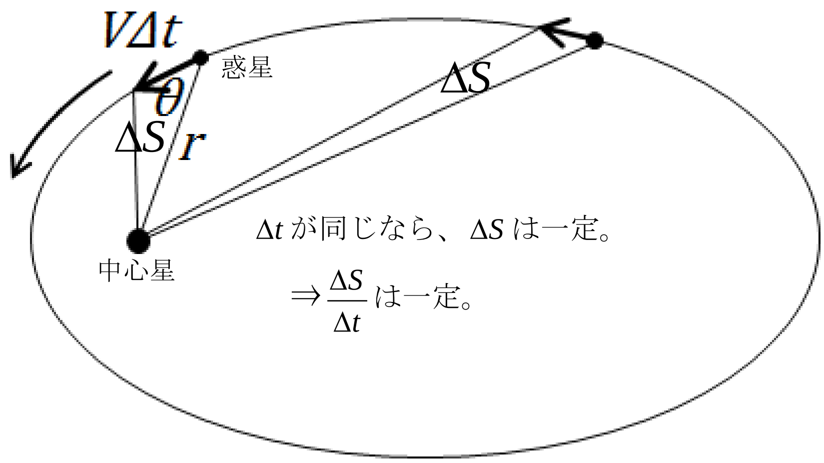
補講　角運動量保存則

１　ケプラーの第２法則

ケプラーの法則[高](Kepler's law)は、太陽（中心星）のまわりを公転する惑星の運動に関する法則である。このうち、ケプラーの第２法則は**面積速度一定の法則**[高]ともよばれる。太陽系においては惑星の軌道は円軌道に近いが、楕円軌道を描く小惑星や彗星は、近日点付近では高速で、遠日点付近では低速で運動する。面積速度一定の法則は、このことを定量的に記述した法則である。



面積速度一定の法則の模式図

ケプラーの法則はニュートン力学から導くことができるが、ここでは、まず、ケプラーの第２法則を観測事実として認識したうえで、理論的な導出を試みる。

参考：ケプラーの法則

１．**楕円軌道の法則**：惑星は中心星をひとつの焦点とする楕円軌道を描く。
２．**面積速度一定の法則**：中心星と惑星を結ぶ線分は等しい時間に等しい面積を描く。
３．**調和の法則**：惑星の公転周期の２乗は軌道の長半径の３乗に比例する。

２　角運動量の定義

面積速度一定の法則を参考にして、保存量（時間変化しない量）としての角運動量を定義してみる。惑星の中心星からの距離をr、公転運動の速さをVとおく。さらに、中心星と惑星を結ぶ線分と、公転軌道の接線がなす角をθとする。このとき、中心星と惑星を結ぶ線分が微小な時間Δtの間に描く面積は

$\frac{1}{2} r \times V\Delta t \times \sin\theta$ である。ここでは、その２倍の値を

$$\Delta S = r \times V\Delta t \times \sin\theta$$

と定義する。このとき、面積速度一定の法則は、

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = rV\sin\theta = \text{一定} \quad ①$$

と書ける。そこで、**角運動量**(angular momentum) L を

$$L = mrV\sin\theta \quad ②$$

と定義する。このように定義した物理量 L は、惑星運動において保存量になっている（時間変化しない）はずである。$V\sin\theta$ は速度ベクトルの回転方向の成分なので、角運動量の物理的な意味は、距離と回転方向の速度（厳密には運動量）成分との積であるといえる。

３　角運動量の計算

②で定義した角運動量 L をベクトルで表すと、

$$L = mrV\sin\theta = m|\vec{r}||\vec{V}|\sin\theta = m|\vec{r}||\vec{V}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

となる。ここで、

$$\vec{r} \bullet \vec{V} = |\vec{r}||\vec{V}|\cos\theta$$

を用いると、

$$L = m|\vec{r}||\vec{V}|\sqrt{1-\frac{(\vec{r}\bullet\vec{v})^2}{|\vec{r}|^2|\vec{V}|^2}} = m\sqrt{|\vec{r}|^2|\vec{V}|^2-(\vec{r}\bullet\vec{V})^2} \quad ③$$

が得られる。角運動量 L を成分で表すと、

$$\begin{aligned} L &= m\sqrt{|\vec{r}|^2|\vec{V}|^2-(\vec{r}\bullet\vec{V})^2} = m\sqrt{(x^2+y^2)(u^2+v^2)-(xu+yv)^2} \\ &= m\sqrt{x^2v^2+y^2u^2-2xyuv} = m\sqrt{(xv-yu)^2} = m|xv-yu| \end{aligned} \quad ④$$

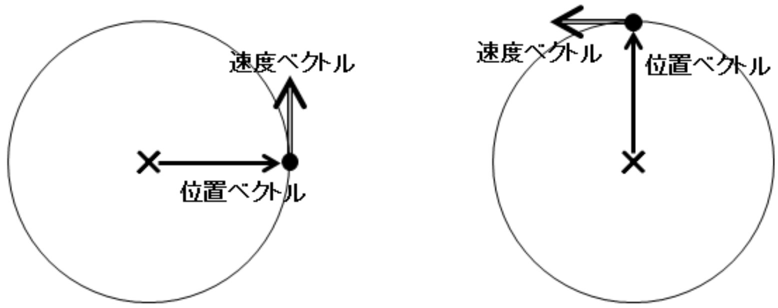
となる。④は、外積を用いて、

$$L = m|\vec{r}\times\vec{V}|$$

と表すこともできる。ここであらためて、角運動量 L を、符号を含めて

$$L = m(xv-yu) = m\vec{r}\times\vec{V} \quad ⑤$$

と定義する。L が正になるのは、たとえば、次の図のような場合である。正の角運動量が反時計回りの回転に対応していることがわかる。



正の角運動量の模式図

４　角運動量の時間変化

角運動量の時間変化を調べてみる。惑星運動の場合、面積速度一定の法則より、角運動量の時間変化はゼロであることが予想される。⑤で定義した角運動量 L の時間微分を計算すると、

$$\frac{d}{dt}L = m\frac{d}{dt}\left(xv - yu\right) = m\left(\dot{x}v + x\dot{v} - \dot{y}u - y\dot{u}\right)$$

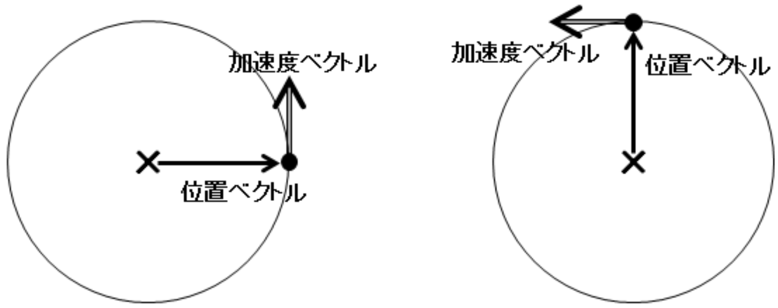
となる。ここで、

$$u = \dot{x}, \quad v = \dot{y}$$

だから、

$$\frac{d}{dt}L = m\left(uv + x\dot{v} - vu - y\dot{u}\right) = m\left(x\dot{v} - y\dot{u}\right) \qquad ⑥$$

が得られる。角運動量の時間微分が正になるのは、たとえば、次の図のような場合である。



角運動量の時間微分が正の場合の模式図

さて、惑星運動の場合、惑星にはたらく力は万有引力である。万有引力は常に中心星に向かう方向にはたらく。ここでは、惑星にはたらく力が動径方向（中心に向かう方向または中心から遠ざかる方向）の成分だけを持つ場合を考える。このような力を一般に中心力とよぶことがある。中心力ベクトルは位置ベクトルに平行なので、加速度ベクトルも位置ベクトルに平行である。したがって、

加速度ベクトル$(\dot{u},\dot{v})$は

$$(\dot{u},\dot{v})=c(x,y)=(cx,cy) \qquad (c\text{は定数})$$

と書ける。これを⑥に代入すると、

$$\frac{d}{dt}L=m\frac{d}{dt}(xv-yu)=m(x\dot{v}-y\dot{u})=m\{x(cy)-y(cx)\}=0 \qquad ⑦$$

となって、角運動量が時間変化しないことがわかる。これが**角運動量保存則**(the law of conservation of angular momentum)である。角運動量保存則が成り立つのは中心力以外の力がはたらかない場合である。

５　３次元空間での角運動量

ここまではx-y平面内での運動について角運動量を考えてきた。この場合、角運動量はスカラー量である。３次元空間に拡張した場合には、x-y平面、y-z平面、z-x平面というそれぞれの平面内で角運動量を考えることができる。そこで、角運動量をベクトル量であると考えて、

角運動量のx成分： y-z平面上での角運動量
角運動量のy成分： z-x平面上での角運動量
角運動量のz成分： x-y平面上での角運動量

と定義する。数式で書けば、

$$\begin{aligned} L_x &= m(yw-zv) \\ L_y &= m(zu-xw) \\ L_z &= m(xv-yu) \end{aligned} \qquad ⑧$$

となる。このように定義された角運動量は、３次元空間でのベクトルの外積を用いて、

$$\vec{L}=m\vec{r}\times\vec{V} \qquad ⑨$$

と書くことができる。物理学においては一般に⑨によって角運動量を定義する。