

気象学特論演習（数値気象学）

（2017 年度春学期）

目次

数値モデルの基礎

1	熱伝導方程式	1
2	波動方程式	7
3	数値解の特性	11
4	浅水方程式系	16

1 熱伝導方程式

晴天日の日中には地表面は日射によって加熱され、温度が高くなる。このような地表面の温度の日変化は、地中に伝わっていくであろう。深くなるにしたがって温度の日変化には遅れが生じ、日変化の振幅は小さくなっていくと予想される。ここでは、このような地中の温度の日変化を数値シミュレーションによって求めてみよう。

1. 1 熱伝導方程式とは

密度 ρ 、比熱 c の均質な媒質中の温度（温度偏差） $T(z, t)$ の時間変化は、

$$c\rho \frac{\partial}{\partial t} T = - \frac{\partial}{\partial z} F \quad [1]$$

と書ける。ここで、 F は熱フラックスであって、定数 k を用いて、

$$F = -k \frac{\partial}{\partial z} T \quad [2]$$

と表すことができるので、[1]は、

$$c\rho \frac{\partial}{\partial t} T = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial}{\partial z} T \right)$$

と書ける。定数 k を**熱伝導率**(heat conductivity)という。 c 、 ρ 、 k は定数だから、 $a = k/c\rho$ とおくと、

$$\frac{\partial}{\partial t} T = a \frac{\partial^2}{\partial z^2} T \quad [3]$$

と表せる。定数 a ($a > 0$) を**熱拡散係数**(thermal diffusivity)という。

方程式[3]は2階線形偏微分方程式の一種であり**放物型**(parabolic type)である。このような方程式を**熱伝導方程式**(heat conduction equation)とよぶことがある。ここで、温度が周期的に変化すると仮定して、

$$T = \Re T'(z) e^{-i\omega t} \quad [4]$$

とおく。 ω は角振動数である。[3]に代入すると、

$$-i\omega T' = a \frac{d^2}{dz^2} T' \quad [5]$$

となる。

方程式[5]は、線形常微分方程式であり、同次（斉次）形で、かつ定数係数であるから、解を

$$T' = \hat{T} e^{imz} \quad [6]$$

とおく。ただし、 $\hat{T}$ は定数である。このとき、特性方程式は

$$-i\omega = -am^2 \quad [7]$$

となる。特性方程式を解くと、

$$m = \pm \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2} \sqrt{\frac{\omega}{a}} \quad [8]$$

が得られる。[8]を[6]、[4]に代入して、

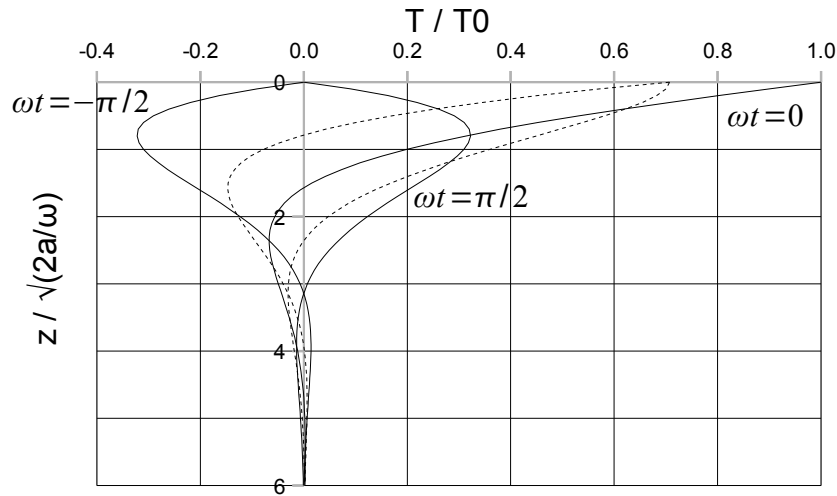
$$T = \Re \hat{T} \exp \left[\mp \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\omega}{a}} z \right] \exp \left[i \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\omega}{a}} z - \omega t \right) \right] \quad [9]$$

となる。ここで、境界条件として、 $z=0$ で $T=T_0 \cos \omega t$ (T_0 は実数)、 $z \rightarrow +\infty$ で $T \rightarrow 0$ とすると、 $\hat{T}=T_0$ となって、

$$\begin{aligned} T &= \Re T_0 \exp \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\omega}{a}} z \right] \exp \left[i \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\omega}{a}} z - \omega t \right) \right] \\ &= T_0 \exp \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\omega}{a}} z \right] \cos \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\omega}{a}} z - \omega t \right) \end{aligned} \quad [10]$$

が得られる。

T の鉛直分布を図示すると下の図のようになる。熱拡散係数 a の値は土壌の種類によって異なるが、典型的な値の例としては、 $c=1 \times 10^3 \text{ J/kg K}$ 、 $\rho=2 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、 $k=1 \text{ W/K m}$ 、 $a=5 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ である。このとき、日変化の影響が及ぶ深さのスケール（日変化の大きさが $1/e$ 倍に減衰する深さ）は、 $H=\sqrt{2a/\omega}=1.2 \times 10^{-1} \text{ m}$ である。



温度分布の時間変化

1. 2 熱伝導方程式の差分化

方程式[3]の解を数値積分（数値シミュレーション）によって求めることを考える。この方程式は時間微分(t -微分)と空間微分(z -微分)を用いて記述されている。時間微分とは、無限に小さい時間間隔における変化の割合のことであるが、計算機によって物理量の時間変化をシミュレーションするときには、物理量の時間微分を、有限な大きさの時間間隔 Δt における差分に置きかえる必要がある。同様に空間微分を計算するときには、物理量の空間微分を、有限な格子間隔 Δz における差分に置きかえる必要がある。はじめに、時間微分

$$\frac{\partial}{\partial t} T$$

は、時間差分

$$\frac{T^+ - T^0}{\Delta t}$$

に置きかえられる。ただし、 Δt は時間差分の間隔を表す。また、 T^0 は温度 T の時刻 $t=t_0$ における値、 T^+ は時刻 $t=t_0+\Delta t$ における値である。次に、空間微分

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} T \right)_{z=z_0}$$

は、空間差分

$$\frac{T_{z=z_0+\Delta z/2} - T_{z=z_0-\Delta z/2}}{\Delta z}$$

に置きかえられる。ただし、 Δz は空間差分の間隔を表す。したがって、空間方向の 2 階微分

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} T = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial z} T \right)$$

は、まず空間差分

$$\frac{\left(\frac{\partial}{\partial z} T \right)_{z=z_0+\Delta z/2} - \left(\frac{\partial}{\partial z} T \right)_{z=z_0-\Delta z/2}}{\Delta z}$$

に置きかえられ、さらに、

$$\frac{\frac{T_{z=z_0+\Delta z} - T_{z=z_0}}{\Delta z} - \frac{T_{z=z_0} - T_{z=z_0-\Delta z}}{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{T_{z=z_0+\Delta z} + T_{z=z_0-\Delta z} - 2T_{z=z_0}}{\Delta z^2}$$

と表すことができる。

以上のような置きかえによって、方程式[3]が表す時間、空間微分を差分で表現すると、

$$\frac{T_{z=z_0}^+ - T_{z=z_0}^0}{\Delta t} = a \frac{T_{z=z_0+\Delta z}^0 + T_{z=z_0-\Delta z}^0 - 2T_{z=z_0}^0}{\Delta z^2} \quad [11]$$

と書きかえられる。[11]を変形すると、

$$T_{z=z_0}^+ = T_{z=z_0}^0 + a \frac{T_{z=z_0+\Delta z}^0 + T_{z=z_0-\Delta z}^0 - 2T_{z=z_0}^0}{\Delta z^2} \Delta t \quad [12]$$

となる。[12]を用いれば、ある時刻 $t=t_0$ における T の分布から、次の時刻 $t=t_0+\Delta t$ における T の分布を求めることができる。[12]のように、ある時刻における物理量の値と物理量の時間微分の値から、次の時刻における物理量の値を求める時間積分の方法を**オイラー法**(Euler method)という。

課題 1 熱伝導方程式[3]の数値解を求めよ。ただし、 $a=5 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ とする。格子間隔は $\Delta z=0.01$ 、計算領域は $z=0 \text{ m}$ から $z=2 \text{ m}$ まで、時間間隔は $\Delta t=60 \text{ s}$ 、計算時間は $t=0 \text{ s}$ から $t=5 \times 86400 \text{ s}$ までとする。また、温度偏差 $T [\text{K}]$ の初期条件は $T=0$ とし、境界条件は

$z=2\text{ m}$ で $T=0$ 、 $z=0\text{ m}$ で

$$T(t)=10\cos\frac{2\pi}{86400}t$$

とする。計算結果は、 $t=4.25\times 86400\text{ s}$ 、 $t=4.50\times 86400\text{ s}$ 、 $t=4.75\times 86400\text{ s}$ 、 $t=5.00\times 86400\text{ s}$ における $T(z)$ を 1 枚の図に重ねて作図して示せ。計算に用いたプログラム(report01.f または report01.c)と図(report01.ps)を提出せよ。

補遺 定数係数の線形常微分方程式の解法

たとえば、 x についての関数 y に関して、次のような定数係数の線形常微分方程式を考える。

$$y'' + 2y' - 3y = 9x \quad [1]$$

[1]を解くためには、まず、右辺をゼロとして、

$$y'' + 2y' - 3y = 0 \quad [2]$$

の解を考える。[1]のような形の定数係数の線形常微分方程式のうち、右辺がゼロであるものをとくに**斉次（同次）形**(homogeneous form)という。ここで、

$$y = Ce^{\lambda x} \quad (C \text{ は定数}) \quad [3]$$

とおいて、斉次方程式[2]に代入すると、

$$\lambda^2 Ce^{\lambda x} + 2\lambda Ce^{\lambda x} - 3Ce^{\lambda x} = 0 \quad [4]$$

となるから、

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \quad [5]$$

である。これを**特性方程式**(characteristic equation)という。[5]の解は、

$$\lambda = 1, -3 \quad [6]$$

だから、[2]を満たす y は、

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} \quad (C_1, C_2 \text{ は定数}) \quad [7]$$

である。これを**斉次（同次）解**(homogeneous solution)という。一方、[1]を満たす解のひとつとして、

$$y = -3x - 2 \quad [8]$$

を挙げることができる。このような解を**特殊解**(particular solution)という。[1]を満たす解は他にもあるが、ここではひとつ例を挙げれば十分である。線形常微分方程式の解は斉次解と特殊解との和であるから、[1]の解は、

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} - 3x - 2 \quad (C_1, C_2 \text{ は定数}) \quad [9]$$

と表せる。これを**一般解**(general solution)という。一般に、 n 階常微分方程式は n 個の任意定数を含む。

特性方程式が複素数解を持つ場合でも同様に考えることができる。たとえば、

$$y'' + y = 0 \quad [10]$$

に対して、特性方程式

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad [11]$$

の解は、

$$\lambda = \pm i \quad [12]$$

だから、[10]を満たす y は、

$$y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix} \quad (C_1, C_2 \text{ は定数}) \quad [13]$$

である。オイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad [14]$$

に注意して、[13]を書きかえると、

$$\begin{aligned} y &= C_1 (\cos x + i \sin x) + C_2 (\cos x - i \sin x) \\ &= (C_1 + C_2) \cos x + i (C_1 - C_2) \sin x \quad (C_1', C_2' \text{ は定数}) \\ &= C_1' \cos x + C_2' \sin x \end{aligned} \tag{15}$$

と表せる。