２　波動方程式

気象場の中では、振動しながら空間を伝播していくさまざまな波動がみられる。ここでは、このような波動の時間変化を数値モデルによって計算してみよう。

２．１　波動方程式とは

弦の振動を考える。弦の変位 $f(x,t)$ の時間方向の２階微分つまり加速度は、変位の空間方向の２階微分に比例し、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}f=\frac{S}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f$$

と書けることが知られている。ただし、 S は張力、 ρ は弦の線密度である。ここで、定数 c を

$$c=\sqrt{\frac{S}{\rho}}$$

と定義すれば、上の方程式は、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}f=c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f \qquad [1]$$

と表せる。この方程式も２階線形偏微分方程式であり、**双曲型**(hyperbolic type)とよばれる。このような方程式を**波動方程式**(wave equation)とよぶことがある。 c は**位相速度**(phase velocity)を表す（ $c>0$ とする）。[1]は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial x}\right)f=0$$

と書くことができるので、以下では、１階線形微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}f+c\frac{\partial}{\partial x}f=0 \qquad [2]$$

の解を考える。ここで、物理量 f が周期的に変化すると仮定して、

$$f=\Re\, f'(x)e^{-i\omega t} \qquad [3]$$

とおく。 ω は角振動数である。[2]に代入すると、

$$-i\omega f'+c\frac{d}{dx}f'=0 \qquad [4]$$

となる。

方程式[4]は、線形常微分方程式であり、同次（斉次）形で、かつ定数係数であるから、解を

$$f'=\hat{f}\,e^{ikx} \qquad [5]$$

とおく。ただし、 $\hat{f}$ は定数である。このとき、特性方程式は

$$-i\omega+ick=0 \qquad [6]$$

となる。特性方程式を解くと、

$$\omega=ck \qquad [7]$$

が得られる。[5]、[7]を[3]に代入して、

$$f=\Re\,\hat{f}\,e^{ik(x-ct)} \qquad [8]$$

となる。[8]において、一般に、

$$f(x+c\Delta t, t+\Delta t)=f(x,t)$$

が成り立つ。したがって、[8]は、位相速度 $+c$ で伝播する波動を表していると考えられる。なお、２階偏微分方程式[1]は、１次元空間を位相速度 $\pm c$ で伝播する波動を表している。

２．２　波動方程式の差分化

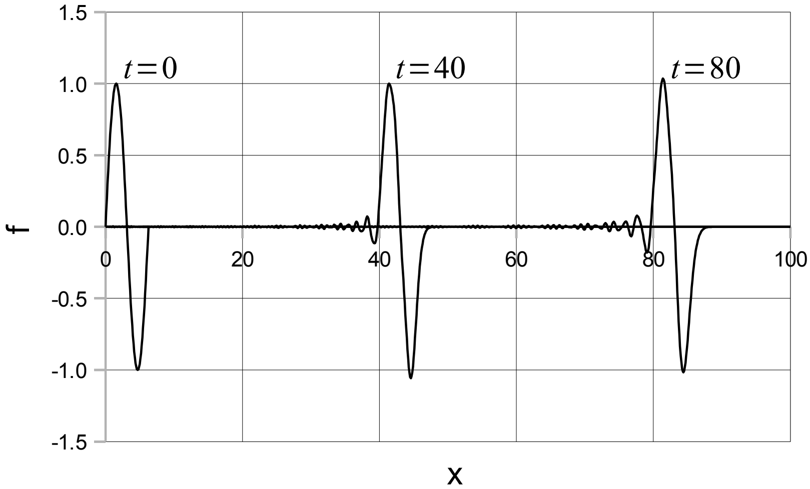
方程式[2]の解を数値積分（数値シミュレーション）によって求めることを考える。[2]が表す時間、空間微分を差分で表現すると、

$$\frac{f^{+}_{x=x_0}-f^{-}_{x=x_0}}{2\Delta t}=-c\frac{f^{0}_{x=x_0+\Delta x}-f^{0}_{x=x_0-\Delta x}}{2\Delta x} \qquad [9]$$

と書きかえられる。f^0 は物理量 f の時刻 $t=t_0$ における値、f^- は時刻 $t=t_0-\Delta t$ における値、f^+ は時刻 $t=t_0+\Delta t$ における値である。ここでは、対称性を考慮して、空間差分は $x=x_0-\Delta x$ と $x=x_0+\Delta x$ との間で計算している。このような空間差分を**中央差分**(central difference)という。なお、一般には、上流からの影響が重要であると考えて、各格子点の流速の値を参照して、その格子点と上流側で隣接する格子点との間で差分を計算する**上流差分**(upstream difference)という方法もある。また、時間差分は $t=t_0-\Delta t$ と $t=t_0+\Delta t$ との間で計算している。[9]を変形すると、

$$f^{+}_{x=x_0}=f^{-}_{x=x_0}-c\frac{f^{0}_{x=x_0+\Delta x}-f^{0}_{x=x_0-\Delta x}}{2\Delta x}(2\Delta t) \qquad [10]$$

となる。[10]を用いれば、ある時刻 $t=t_0$ と前の時刻 $t=t_0-\Delta t$ における f の分布から、次の時刻 $t=t_0+\Delta t$ における f の分布を求めることができる。[10]のように、ある時刻の前の時刻における物理量の値と、その時刻における物理量の時間微分の値から、次の時刻における物理量の値を求める時間積分の方法を**リープフロッグ法**(leap-frog method)という。



波動方程式の数値解の例

課題 2　波動方程式[2]の数値解を求めよ。空間差分としては中央差分、時間積分としてはリープフロッグ法を用いよ。ただし、$c=1$ とする。格子間隔は $\Delta x=0.1$ 、計算領域は $x=0$ から $x=100$ まで、時間間隔は $\Delta t=0.05$ 、計算時間は $t=0$ から $t=80$ までとする。また、初期条件は

$$f(x)=\sin x \qquad (0 \le x \le 2\pi)$$

$$f(x)=0 \qquad (2\pi < x)$$

とし、境界条件は $f=0$ （ $x=0$ 、 $x=100$ ）とする。計算結果は、 $t=0$ 、 $t=40$ 、 $t=80$ における $f(x)$ を 1 枚の図に重ねて作図して示せ。計算に用いたプログラム(report02.f または report02.c)と図(report02.ps)を提出せよ。

補遺　２階線形偏微分方程式の分類

二次曲線である楕円、放物線、双曲線はそれぞれ

$$a x^2 + b y^2 = 0 \quad , \quad y - a x^2 = 0 \quad , \quad a x^2 - b y^2 = 0 \quad (\ a \ , \ b \ \text{は定数})$$

のように書くことができる。これにならって、２階線形偏微分方程式を**楕円型**(elliptic type)、**放物型**(parabolic type)、**双曲型**(hyperbolic type)の３つに分類することがある。まず、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f = 0 \qquad [1]$$

のような偏微分方程式を楕円型という。代表例として、**ラプラス方程式**(Laplace's equation)が挙げられる。３次元空間で

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f = 0$$

としたものも同様である。ラプラシアンを

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

と定義して、

$$\Delta f = 0$$

と書くこともできる。また、ラプラス方程式の右辺に既知の関数を与えて、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f = g$$

としたものは、**ポアソン方程式**(Poisson's equation)とよばれる。たとえば、電荷の分布を与えて電位の分布を求めるときに用いられる。

同様にして、放物線の方程式と同様の形をとる

$$\frac{\partial}{\partial y} f - \frac{\partial^2}{\partial x^2} f = 0 \qquad [2]$$

のような偏微分方程式を放物型という。代表例として、熱伝導方程式が挙げられる。また、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f - \frac{\partial^2}{\partial y^2} f = 0 \qquad [3]$$

のような偏微分方程式を双曲型という。代表例として、波動方程式が挙げられる。