４　浅水方程式系

４．１　浅水方程式系とは

浅水方程式系(shallow-water equation)は、水平流速を u 、高度偏差を h として、

$$\frac{\partial}{\partial t}u=-g\frac{\partial}{\partial x}h \qquad [1]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}h=-H\frac{\partial}{\partial x}u \qquad [2]$$

と書けた。ただし、 g は重力加速度、 H は水深である。ここでは簡単のため、線形化した方程式系を用いている。なお、数値モデルにおいては線形化しなくても数値積分は可能である。[1]を t で偏微分、[2]を x で偏微分して、 h を消去すると、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u=gH\frac{\partial^2}{\partial x^2}u \qquad [3]$$

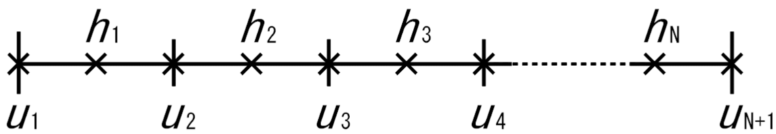
となる。したがって、この方程式系の解としては、位相速度 c で伝播する波動が得られる。ただし、

$$c=\pm\sqrt{gH} \qquad [4]$$

である。

４．２　多変数の方程式系の数値積分

次に、方程式系[1]、[2]を差分化することを考える。方程式系[1]、[2]によると、隣接する h の値に差があるとその間の u の値に時間変化が生じ、隣接する u の値に差があるとその間の h の値に時間変化が生じる。このような特性を的確に表現するため、 u と h の格子を次の図のように設定する。



このとき、方程式系[1]、[2]をリープフロッグ法を用いて差分化すると、

$$u^{+}_{x=x_0}=u^{-}_{x=x_0}-g\frac{h^{0}_{x=x_0+\Delta x/2}-h^{0}_{x=x_0-\Delta x/2}}{\Delta x}(2\Delta t) \qquad [5]$$

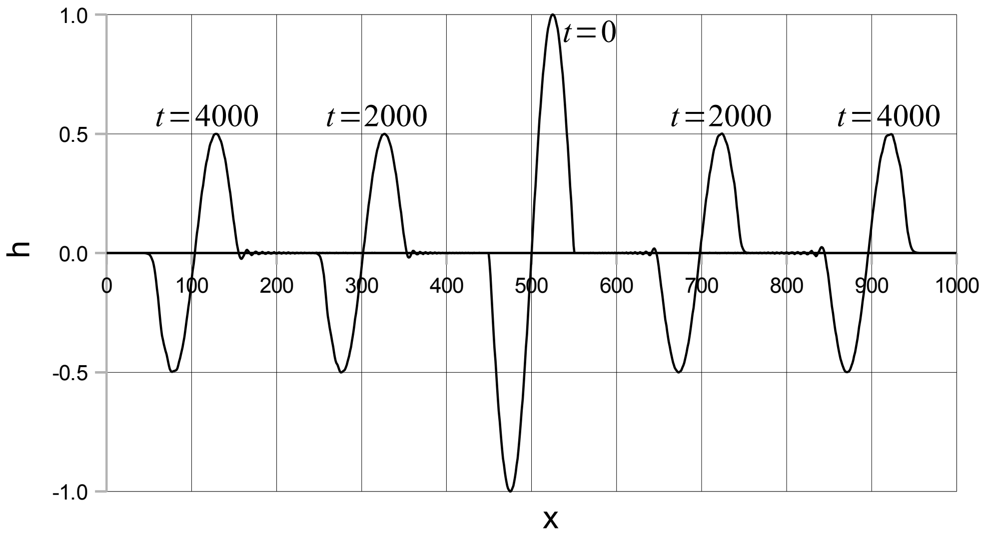
$$h^{+}_{x=x_0}=h^{-}_{x=x_0}-H\frac{u^{0}_{x=x_0+\Delta x/2}-u^{0}_{x=x_0-\Delta x/2}}{\Delta x}(2\Delta t) \qquad [6]$$

と書ける。[5]、[6]は、格子番号 n を用いると、

$$u^{+}_{n}=u^{-}_{n}-g\frac{h^{0}_{n}-h^{0}_{n-1}}{\Delta x}(2\Delta t) \qquad [7]$$

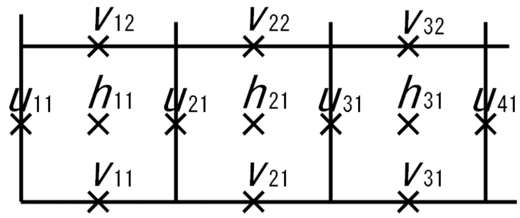
$$h^{+}_{n}=h^{-}_{n}-H\frac{u^{0}_{n+1}-u^{0}_{n}}{\Delta x}(2\Delta t) \qquad [8]$$

と表せる。



浅水方程式系の数値解の例

なお、２次元であれば、u 、v 、h の格子を次の図のように設定すればよい。



このような水平格子を**荒川 C グリッド**(Arakawa C-grid)という。

課題 4　1 次元空間での浅水方程式系[1]、[2]の数値解を求めよ。高度偏差の格子を流速の格子から半格子間隔だけずらして設定せよ。空間差分としては、隣接する２つの格子における値の差を用いよ。時間積分としてはリープフロッグ法を用いよ。ただし、水深は $H=1000$ m、重力加速度は $g=9.81$ m/s^2 とする。格子間隔は $\Delta x=1000$ m、計算領域は $x=0$ m から $x=1000\times10^3$ m まで、時間間隔は $\Delta t=2$ s、計算時間は $t=0$ s から $t=4000$ s までとする。また、初期条件は

$$h(x)=\sin 2\pi\frac{x-500\times10^3}{100\times10^3} \quad (\ 450\times10^3\leq x\leq 550\times10^3\ )$$

$$h(x)=0 \quad \text{(それ以外)}$$

$$u(x)=0 \quad \text{(すべての } x\text{)}$$

とし、境界条件は $u=0$ （ $x=0$ m、 $x=1000\times10^3$ m）とする。計算結果は、 $t=0$ s、 $t=2000$ s、 $t=4000$ s における高度偏差 $h(x)$ を 1 枚の図に重ねて作図して示せ。計算に用いたプログラム(report04.f または report04.c)と図(report04.ps)を提出せよ。

補遺　時間積分の方法

時間積分の方法には、オイラー法やリープフロッグ法以外にもいくつかの方法がある。以下、f^0 は変数ベクトル f の時刻 $t=t_0$ における値、f^- は時刻 $t=t_0-\Delta t$ における値、f^+ は時刻 $t=t_0+\Delta t$ における値とする。また、時間微分を求める演算子を D とする（一般には D は線形演算子とは限らない）。

このとき、オイラー法は、

$$f^+=f^0+Df^0\Delta t$$

リープフロッグ法は、

$$f^+=f^-+2\,Df^0\Delta t$$

と書ける。

後退オイラー法(backward Euler method)は、

$$f^+=f^0+Df^+\Delta t$$

と定義される。時刻 $t=t_0+\Delta t$ における値である f^+ を求めるためには、あらかじめ Df^+ を知らなければならない。線形モデルの場合には、逆演算子を用いて、

$$f^+=(1-\Delta t\,D)^{-1}f^0$$

とすることができる。**松野法**(Matsuno method)では、逆演算子を用いずに後退オイラー法を適用するため、まずオイラー法で時刻 $t=t_0+\Delta t$ における仮の値 f^{+*} を求めておき、次にその値を用いて後退オイラー法に基づいた時間積分を行なって f^+ を求める。つまり、

$$f^{+*}=f^0+Df^+\Delta t$$

$$f^+=f^0+Df^{+*}\Delta t$$

とする。また、**台形法**(trapezoidal method)では、時刻 $t=t_0$ から $t=t_0+\Delta t$ までの時間変化を 2 つの時刻における時間微分の平均から求めて、

$$f^+=f^0+\frac{Df^0+Df^+}{2}\Delta t$$

とする。

オイラー法やリープフロッグ法では、時間微分を求めるときに、その時刻までの値だけを用いた。一般に、このような時間積分の方法を**陽解法（イクスプリシット法）**(explicit method)という。それに対して、後退オイラー法や松野法、台形法では、時間微分を求めるときに、次の時刻の値を用いている。このような時間積分の方法を**陰解法（インプリシット法）**(implicit method)という。陰解法では、何らかの方法で次の時刻の値を仮に求めておく必要がある。このため、同じ時間間隔であれば、陽解法より計算量が多くなる傾向がある。しかし、安定性など数値解の特性を考慮して、陰解法が選ばれることがある。

また、非線形項に陰解法を適用するのは困難なので、線形項に対してだけ安定性の高い陰解法を用いて、非線形項には陽解法を用いることがある。たとえば、

$$f^{+}=f^{0}+\frac{D_1 f^{0}+D_1 f^{+}}{2}\Delta t+D_2 f^{0}\Delta t$$

とする。ただし、 D_1 は線形項によって生じる時間変化に対応する時間微分、 D_2 は非線形項によって生じる時間変化に対応する時間微分である。このような方法を**セミインンプリシット法**(semi-implicit method)という。

　時間積分の方法によって、安定性や計算モードの有無、数値分散などの数値計算上の特性が異なるので、適切な方法を選択する必要がある。