気象学特論演習（数値気象学）

（2014 年度春学期）

目次

１　熱伝導方程式

晴天日の日中には地表面は日射によって加熱され、温度が高くなる。このような地表面の温度の日変化は、地中に伝わっていくであろう。深くなるにしたがって温度の日変化には遅れが生じ、日変化の振幅は小さくなっていくと予想される。ここでは、このような地中の温度の日変化を数値シミュレーションによって求めてみよう。

１．１　熱伝導方程式とは

密度 ρ 、比熱 c の均質な媒質中の温度（温度偏差） $T(z,t)$ の時間変化は、

$$c\rho\frac{\partial}{\partial t}T=-\frac{\partial}{\partial z}F \qquad [1]$$

と書ける。ここで、 F は熱フラックスであって、定数 k を用いて、

$$F=-k\frac{\partial}{\partial z}T \qquad [2]$$

と表すことができるので、[1]は、

$$c\rho\frac{\partial}{\partial t}T=\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial}{\partial z}T\right)$$

と書ける。定数 k を**熱伝導率**(heat conductivity)という。 c 、 ρ 、 k は定数だから、$a=k/c\rho$ とおくと、

$$\frac{\partial}{\partial t}T=a\frac{\partial^2}{\partial z^2}T \qquad [3]$$

と表せる。定数 a （ $a>0$ ）を**熱拡散係数**(thermal diffusivity)という。

方程式[3]は２階線形偏微分方程式の一種であり**放物型**(parabolic type)である。このような方程式を**熱伝導方程式**(heat conduction equation)とよぶことがある。ここで、温度が周期的に変化すると仮定して、

$$T=\Re T'(z)e^{-i\omega t} \qquad [4]$$

とおく。 ω は角振動数である。[3]に代入すると、

$$-i\omega T'=a\frac{d^2}{dz^2}T' \qquad [5]$$

となる。

方程式[5]は、線形常微分方程式であり、同次（斉次）形で、かつ定数係数であるから、解を

$$T'=\hat{T}e^{imz} \qquad [6]$$

とおく。ただし、 $\hat{T}$ は定数である。このとき、特性方程式は

$$-i\omega=-am^2 \qquad [7]$$

となる。特性方程式を解くと、

$$m = \pm \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\sqrt{\frac{\omega}{a}} \qquad [8]$$

が得られる。[8]を[6]、[4]に代入して、

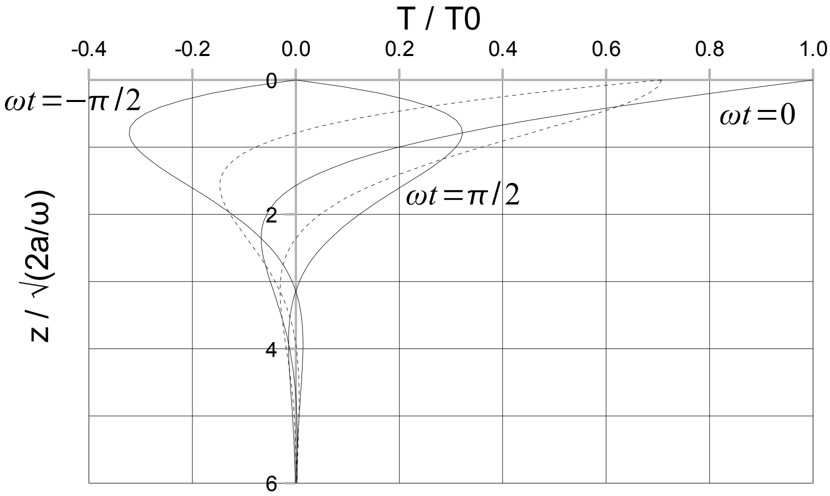
$$T = \Re\,\hat{T}\exp\left[\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{\omega}{a}}z\right]\exp\left[i\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{\omega}{a}}z-\omega t\right)\right] \qquad [9]$$

となる。ここで、境界条件として、$z=0$ で $T=T_0\cos\omega t$ （T_0 は実数）、$z\to+\infty$ で $T\to 0$ とすると、$\hat{T}=T_0$ となって、

$$\begin{aligned} T &= \Re\,T_0\exp\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{\omega}{a}}z\right]\exp\left[i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{\omega}{a}}z-\omega t\right)\right] \\ &= T_0\exp\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{\omega}{a}}z\right]\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{\omega}{a}}z-\omega t\right) \end{aligned} \qquad [10]$$

が得られる。

T の鉛直分布を図示すると下の図のようになる。熱拡散係数 a の値は土壌の種類によって異なるが、典型的な値の例としては、$c=1\times10^3$ J/kg K、$\rho=2\times10^3$ kg/m^3、$k=1$ W/K m、$a=5\times10^{-7}$ m^2/s である。このとき、日変化の影響が及ぶ深さのスケール（日変化の大きさが $1/e$ 倍に減衰する深さ）は、$H=\sqrt{2a/\omega}=1.2\times10^{-1}$ m である。



温度分布の時間変化

１．２　熱伝導方程式の差分化

方程式[3]の解を数値積分（数値シミュレーション）によって求めることを考える。この方程式は時間微分(t-微分）と空間微分(z-微分）を用いて記述されている。時間微分とは、無限に小さい時間間隔における変化の割合のことであるが、計算機によって物理量の時間変化をシミュレーションするときには、物理量の時間微分を、有限な大きさの時間間隔 Δt における差分に置きかえる必要がある。同様に空間微分を計算するときには、物理量の空間微分を、有限な格子間隔 Δz における差分に置きかえる必要がある。はじめに、時間微分

$$\frac{\partial}{\partial t}T$$

は、時間差分

$$\frac{T^{+}-T^{0}}{\Delta t}$$

に置きかえられる。ただし、 Δt は時間差分の間隔を表す。また、 T^{0} は温度 T の時刻 $t=t_0$ における値、 T^{+} は時刻 $t=t_0+\Delta t$ における値である。次に、空間微分

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}T\right)_{z=z_0}$$

は、空間差分

$$\frac{T_{z=z_0+\Delta z/2}-T_{z=z_0-\Delta z/2}}{\Delta z}$$

に置きかえられる。ただし、 Δz は空間差分の間隔を表す。したがって、空間方向の２階微分

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}T=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}T\right)$$

は、まず空間差分

$$\frac{\left(\frac{\partial}{\partial z}T\right)_{z=z_0+\Delta z/2}-\left(\frac{\partial}{\partial z}T\right)_{z=z_0-\Delta z/2}}{\Delta z}$$

に置きかえられ、さらに、

$$\frac{\dfrac{T_{z=z_0+\Delta z}-T_{z=z_0}}{\Delta z}-\dfrac{T_{z=z_0}-T_{z=z_0-\Delta z}}{\Delta z}}{\Delta z}=\frac{T_{z=z_0+\Delta z}+T_{z=z_0-\Delta z}-2T_{z=z_0}}{\Delta z^2}$$

と表すことができる。

以上のような置きかえによって、方程式[3]が表す時間、空間微分を差分で表現すると、

$$\frac{T^{+}_{z=z_0}-T^{0}_{z=z_0}}{\Delta t}=a\frac{T^{0}_{z=z_0+\Delta z}+T^{0}_{z=z_0-\Delta z}-2T^{0}_{z=z_0}}{\Delta z^2} \qquad [11]$$

と書きかえられる。[11]を変形すると、

$$T^{+}_{z=z_0}=T^{0}_{z=z_0}+a\frac{T^{0}_{z=z_0+\Delta z}+T^{0}_{z=z_0-\Delta z}-2T^{0}_{z=z_0}}{\Delta z^2}\Delta t \qquad [12]$$

となる。[12]を用いれば、ある時刻 $t=t_0$ における T の分布から、次の時刻 $t=t_0+\Delta t$ における T の分布を求めることができる。[12]のように、ある時刻における物理量の値と物理量の時間微分の値から、次の時刻における物理量の値を求める時間積分の方法を**オイラー法**(Euler method)という。

課題１　熱伝導方程式[3]の数値解を求めよ。ただし、 $a=5\times10^{-7}$ m²/s とする。格子間隔は $\Delta z=0.01$ 、計算領域は $z=0$ m から $z=2$ m まで、時間間隔は $\Delta t=60$ s、計算時間は $t=0$ s から $t=5\times86400$ s までとする。また、初期条件は $T=0$ とし、境界条件は $z=2$ m で $T=0$ 、

$z=0$ m で

$$T(t)=10\cos\frac{2\pi}{86400}t$$

とする。計算結果は、$t=4.25\times86400$ s、$t=4.50\times86400$ s、$t=4.75\times86400$ s、$t=5.00\times86400$ s における $T(z)$ を 1 枚の図に重ねて作図して示せ。計算に用いたプログラム(report01.f または report01.c)と図(report01.ps)を提出せよ。

補遺　定数係数の線形常微分方程式の解法

たとえば、xについての関数yに関して、次のような定数係数の線形常微分方程式を考える。

$$y''+2y'-3y=9x \qquad [1]$$

[1]を解くためには、まず、右辺をゼロとして、

$$y''+2y'-3y=0 \qquad [2]$$

の解を考える。[1]のような形の定数係数の線形常微分方程式のうち、右辺がゼロであるものをとくに**斉次（同次）形**(homogeneous form)という。ここで、

$$y=Ce^{\lambda x} \quad （C\text{は定数}） \qquad [3]$$

とおいて、斉次方程式[2]に代入すると、

$$\lambda^2 Ce^{\lambda x}+2\lambda Ce^{\lambda x}-3Ce^{\lambda x}=0 \qquad [4]$$

となるから、

$$\lambda^2+2\lambda-3=0 \qquad [5]$$

である。これを**特性方程式**(characteristic equation)という。[5]の解は、

$$\lambda=1,-3 \qquad [6]$$

だから、[2]を満たすyは、

$$y=C_1e^x+C_2e^{-3x} \quad （C_1,\ C_2\text{は定数}） \qquad [7]$$

である。これを**斉次（同次）解**(homogeneous solution)という。一方、[1]を満たす解のひとつとして、

$$y=-3\mathrm{x}-2 \qquad [8]$$

を挙げることができる。このような解を**特殊解**(particular solution)という。[1]を満たす解は他にもあるが、ここではひとつ例を挙げれば十分である。線形常微分方程式の解は斉次解と特殊解との和であるから、[1]の解は、

$$y=C_1e^x+C_2e^{-3x}-3x-2 \quad （C_1,\ C_2\text{は定数}） \qquad [9]$$

と表せる。これを**一般解**(general solution)という。一般に、n階常微分方程式はn個の任意定数を含む。

特性方程式が複素数解を持つ場合でも同様に考えることができる。たとえば、

$$y''+y=0 \qquad [10]$$

に対して、特性方程式

$$\lambda^2+1=0 \qquad [11]$$

の解は、

$$\lambda=\pm i \qquad [12]$$

だから、[10]を満たすyは、

$$y=C_1e^{ix}+C_2e^{-ix} \quad （C_1,\ C_2\text{は定数}） \qquad [13]$$

である。オイラーの公式

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \qquad [14]$$

に注意して、[13]を書きかえると、

$$\begin{aligned} y &= C_1(\cos x + i\sin x) + C_2(\cos x - i\sin x) \\ &= (C_1 + C_2)\cos x + i(C_1 - C_2)\sin x \qquad (C_1{}',\ C_2{}' \text{は定数}) \qquad [15] \\ &= C_1{}'\cos x + C_2{}'\sin x \end{aligned}$$

と表せる。