

6 最適内挿法

6. 1 格子点値の推定

2つの地点で気温の解析値を求めることを考えてみよう。互いに近接する地点A、Bでは、気温の第一推定値はともに $20 \pm 1^\circ\text{C}$ である。一方、気温の観測値は、地点Aでは $22 \pm 1^\circ\text{C}$ 、地点Bでは $18 \pm 1^\circ\text{C}$ とする。地点AとBで別々に解析値を求めると、それぞれ 21°C 、 19°C となる。

地点	第一推定値	観測値	解析値
地点A	$20 \pm 1^\circ\text{C}$	$22 \pm 1^\circ\text{C}$	$21^\circ\text{C}?$
地点B	$20 \pm 1^\circ\text{C}$	$18 \pm 1^\circ\text{C}$	$19^\circ\text{C}?$

実際に、[8]にならって評価関数 J を定義すると、

$$J = \frac{(x_A - z_A)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(x_B - z_B)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y_A - z_A)^2}{\sigma_y^2} + \frac{(y_B - z_B)^2}{\sigma_y^2}$$

となる。ただし、 $x_A = x_B = 20$ 、 $y_A = 22$ 、 $y_B = 18$ 、 $\sigma_x = \sigma_y = 1$ である。 J が最小となる z_A 、 z_B を求めると、 $z_A = 21$ 、 $z_B = 19$ が得られ、確かに上記の表のような結果になる。

2地点が十分に離れていて第一推定値や観測値の誤差が2地点間で独立であれば、この方法で問題はないだろう。しかし、2地点が互いに近い位置にある場合、地点Aでは第一推定値の誤差が -1°C であるにもかかわらず、すぐ近くの地点Bで第一推定値の誤差が $+1^\circ\text{C}$ に達するのは不自然である。なぜなら、通常は近接した2地点間で数値モデルが予想した気温の誤差はほとんど等しいと考えられるからである。2地点で独立に観測をしていれば、観測値の誤差は互いに独立であるが、第一推定値の誤差は互いに独立とはいえないのである。むしろ、地点A、Bを含む地域一帯で気温を2回測定したら 22°C 、 18°C という結果が得られた、と考えたほうが自然であろう。この場合、2地点での解析値はいずれも、もっと 20°C に近い値をとるべきであり、たとえば、 20.5°C 、 19.5°C のように推定されるはずである。

上記のような場合について、2地点での気温の値の平均 ($\frac{A+B}{2}$) と、差 (正確には差の $\frac{1}{2}$ 倍の値) ($\frac{A-B}{2}$) の第一推定値と観測値の誤差を考えてみよう。観測は独立に行われているので、観測値の誤差は無相関である。2地点での平均値、差とも、その誤差は各地点での観測値の誤差の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍 $\doteq 0.7$ 倍になる。

地点	第一推定値	観測値	解析値
$(A+B) / 2$	$20.0 \pm 0.9^\circ\text{C}$	$20.0 \pm 0.7^\circ\text{C}$	20.0°C
$(A-B) / 2$	$0.0 \pm 0.4^\circ\text{C}$	$2.0 \pm 0.7^\circ\text{C}$	0.5°C

一方、第一推定値の誤差は、A地点とB地点において、正相関を持つと考えられる。つまり、一方の第一推定値が真の値よりも高く正の誤差を持てば、すぐ近くのもう一方の地点でも同じように正の誤差を持つと考えられる。したがって、2地点での気温の値の平均

($\frac{A+B}{2}$) の第一推定値の誤差については、各地点での第一推定値の誤差の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍よりは

大きくなるはずである。逆に、差 ($\frac{A-B}{2}$) の第一推定値の誤差は、各地点での第一推定

値の誤差の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍よりは小さくなるはずである。上の例では、平均の誤差 σ_s は 0.9°C 、差

の誤差 σ_a は 0.4°C としている。ここで、[4]にあてはめて最適な解析値を求めると、平均（対称成分）の解析値は 20.0°C 、差（反対称成分）の解析値は 0.5°C となる。したがって、気温の解析値は、地点Aでは 20.5°C 、地点Bでは 19.5°C となる。

評価関数を用いて考えると次のようになる。評価関数 J は、[8]を拡張して

$$J = \frac{\left\{ \frac{(x_A - z_A) + (x_B - z_B)}{2} \right\}^2}{\sigma_s^2} + \frac{\left\{ \frac{(x_A - z_A) - (x_B - z_B)}{2} \right\}^2}{\sigma_a^2} + \frac{(y_A - z_A)^2}{\sigma_y^2} + \frac{(y_B - z_B)^2}{\sigma_y^2}$$

と書ける。ただし、 $\sigma_s=0.9$ 、 $\sigma_a=0.4$ である。 J は行列を用いて次のように表すこともできる。

$$\begin{aligned} J = & \begin{pmatrix} x_A - z_A \\ x_B - z_B \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_s^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_a^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_A - z_A \\ x_B - z_B \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} y_A - z_A \\ y_B - z_B \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_A - z_A \\ y_B - z_B \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} x_A - z_A \\ x_B - z_B \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1.9 & -1.3 \\ -1.3 & 1.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A - z_A \\ x_B - z_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_A - z_A \\ y_B - z_B \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_A - z_A \\ y_B - z_B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで、 J が最小となる z_A 、 z_B を求めると、 $z_A=20.5$ 、 $z_B=19.5$ が得られる。

仮に、第一推定値の誤差が2地点間で独立であり $\sigma_s=\sigma_a=0.7$ とすれば、

$$J = \begin{pmatrix} x_A - z_A \\ x_B - z_B \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A - z_A \\ x_B - z_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_A - z_A \\ y_B - z_B \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_A - z_A \\ y_B - z_B \end{pmatrix}$$

である。

さて、上の式で、

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}^T$$

は、対称成分の基底ベクトルと反対称成分の基底ベクトルの転置を並べたものである。任意のベクトルについて、基底ベクトルとの内積を計算すると、基底ベクトルに並行な成分の大きさを求めることができる。したがって、

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_A - z_A \\ x_B - z_B \end{pmatrix}$$

は、誤差のAにおける値、Bにおける値を、誤差の対称成分と反対称成分に変換する演算であると考えられる。Aにおける値とBにおける値は互いに独立ではないが、対称成分と反対称成分は互いに独立である。したがって、上のように変換した誤差ベクトルに関しては、各成分が独立なので、

$$\begin{aligned} J_x &= \left\{ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_A - z_A \\ x_B - z_B \end{pmatrix} \right\}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_s^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_a^2} \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_A - z_A \\ x_B - z_B \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} x_A - z_A \\ x_B - z_B \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_s^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_a^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_A - z_A \\ x_B - z_B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

という演算を行なうことによって、評価関数のうち第一推定値に関連する成分 J_x を計算できる。

上記の計算例で、

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_s^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_a^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1.9 & -1.3 \\ -1.3 & 1.9 \end{pmatrix}$$

の意味を考えてみよう。右辺の逆行列を計算すると、

$$\begin{pmatrix} 1.9 & -1.3 \\ -1.3 & 1.9 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.7 \\ 0.7 & 1.0 \end{pmatrix}$$

となるが、実は、誤差のAにおける値とBにおける値の分散共分散行列になっている。

一般に、複数の格子点値を持つデータについて、第一推定値と観測値から最適な解析値を求める方法を考えよう。たとえば、 m 個の格子点があって、格子点ごとに第一推定値と観測値が与えられているとする。

仮に、第一推定値の誤差 $x_i - z_i$ が異なる地点間で独立であるとすれば、評価関数[8]の右辺第1項に示されている第一推定値に関連する成分 J_x は、

$$J_x = \begin{pmatrix} x_1 - z_1 \\ x_2 - z_2 \\ \vdots \\ x_m - z_m \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & & O \\ & \frac{1}{\sigma_2^2} & \\ O & & \ddots \\ & & & \frac{1}{\sigma_m^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - z_1 \\ x_2 - z_2 \\ \vdots \\ x_m - z_m \end{pmatrix}$$

と書ける。第一推定値の誤差 $x_i - z_i$ が異なる地点間で独立でない場合は、独立した誤差の成分に注目し、それらを表わす基底ベクトル $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_m$ を用いて、誤差ベクトルを変換すればよい。つまり J_x は

$$J_x = \begin{pmatrix} x_1 - z_1 \\ x_2 - z_2 \\ \vdots \\ x_m - z_m \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \dots & \vec{p}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & & O \\ & \frac{1}{\sigma_2^2} & \\ O & & \ddots \\ & & & \frac{1}{\sigma_m^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{p}_1^T \\ \vec{p}_2^T \\ \vdots \\ \vec{p}_m^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - z_1 \\ x_2 - z_2 \\ \vdots \\ x_m - z_m \end{pmatrix}$$

と書ける。上の計算例で確かめたように、

$$\begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \dots & \vec{p}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & & O \\ & \frac{1}{\sigma_2^2} & \\ O & & \ddots \\ & & & \frac{1}{\sigma_m^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{p}_1^T \\ \vec{p}_2^T \\ \vdots \\ \vec{p}_m^T \end{pmatrix}$$

は分散共分散行列の逆行列である。したがって、第一推定値の誤差の分散共分散行列を B とおくと、

$$J_x = (\vec{x} - \vec{z})^T B^{-1} (\vec{x} - \vec{z})$$

表わせる。

評価関数 J は、 B を第一推定値の誤差の分散共分散行列、 R を観測値の誤差の分散共分散行列とすると、

$$J = (\vec{x} - \vec{z})^T B^{-1} (\vec{x} - \vec{z}) + (\vec{y} - \vec{z})^T R^{-1} (\vec{y} - \vec{z}) \quad [9]$$

と定義できる。ただし、 $\vec{x}$ は予想値、 $\vec{y}$ は観測値、 $\vec{z}$ は求める解析値である。いずれも各格子点における値を列挙した列ベクトルである。 J を z_i で微分すると、

$$\frac{\partial J}{\partial z_i} = -\left\{ B^{-1} (\vec{x} - \vec{z}) \right\}_i - \left[\left\{ (\vec{x} - \vec{z})^T B^{-1} \right\}^T \right]_i - \left\{ R^{-1} (\vec{y} - \vec{z}) \right\}_i - \left[\left\{ (\vec{y} - \vec{z})^T R^{-1} \right\}^T \right]_i$$

となるが、 B 、 R が実対称行列であることと、一般に実対称行列の逆行列は実対称行列であることから、 $(B^{-1})^T = B^{-1}$ 、 $(R^{-1})^T = R^{-1}$ が成り立つので、

$$\frac{\partial J}{\partial z_i} = -2 \{ B^{-1}(\vec{x} - \vec{z}) \}_i - 2 \{ R^{-1}(\vec{y} - \vec{z}) \}_i \quad [10]$$

となる。 J が最小になるとき、すべての z_i について、

$$\frac{\partial J}{\partial z_i} = 0$$

が成り立つから、

$$B^{-1}(\vec{x} - \vec{z}) + R^{-1}(\vec{y} - \vec{z}) = \vec{0} \quad [11]$$

と書ける。[11]を変形すると、

$$(B^{-1} + R^{-1})(\vec{z} - \vec{x}) = R^{-1}(\vec{y} - \vec{x}) \quad [12]$$

となる。両辺に左から $(B^{-1} + R^{-1})^{-1}$ をかけると、

$$\vec{z} - \vec{x} = (B^{-1} + R^{-1})^{-1} R^{-1}(\vec{y} - \vec{x})$$

が得られる。一般に同じ次数の正則行列 P 、 Q について $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$ であることに注意して変形すると、

$$\begin{aligned} \vec{z} - \vec{x} &= (RB^{-1} + E)^{-1}(\vec{y} - \vec{x}) \\ &= BB^{-1}(RB^{-1} + E)^{-1}(\vec{y} - \vec{x}) \\ &= B(B + R)^{-1}(\vec{y} - \vec{x}) \end{aligned}$$

となって、

$$\vec{z} = \vec{x} + B(B + R)^{-1}(\vec{y} - \vec{x}) \quad [13]$$

が得られる。[13]によって、評価関数 J を最小になるような解析値 $\vec{z}$ を求めることができる。

課題 6.1 水平 1 次元空間において、気温の予報変数 T_i ($i=1,2,\dots,8$) が等間隔で分布しているとする。 T の第一推定値の誤差の分散共分散行列 B は

$$b_{ij} = \epsilon_B \times \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{|i-j|^2}{r_0^2} \right]$$

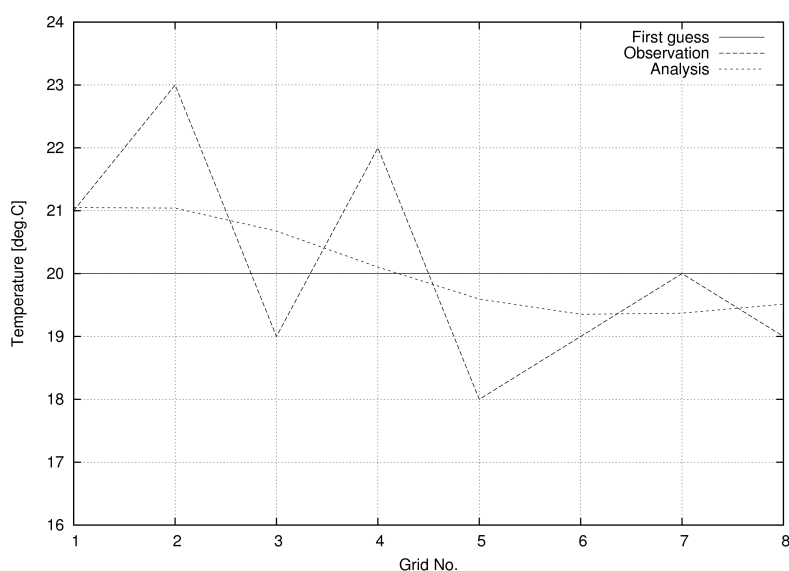
である。ただし、 $\epsilon_B = 1.0$ とする。また、 r_0 は影響半径で $r_0 = 2.0$ とする。また、観測値の誤差の分散共分散行列 R は、

$$r_{ij} = \begin{cases} \epsilon_R & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

である。ただし、 $\epsilon_R = 1.0$ とする。第一推定値と観測値が以下の表のように与えられたとき、最適な解析値を求めよ。

格子番号	第一推定値	観測値
1	20.0	21.0
2	20.0	23.0
3	20.0	19.0
4	20.0	22.0
5	20.0	18.0
6	20.0	19.0
7	20.0	20.0
8	20.0	19.0

計算結果は、第一推定値、観測値、解析値を1枚の図に重ねて作図して示せ。計算に用いたプログラム(report06_1.f または report06_1.c)と図(report06_1.ps)を提出せよ。



解答例

6. 2 第一推定値と観測値の格子が等しくない場合

実際のデータ同化においては、第一推定値や解析値の格子点数に比べて、観測地点数は少ないのが普通である。ここでは、そのような場合の解析値の計算方法を考えよう。

評価関数 J は、モデルの各格子点での第一推定値、解析値の値を、観測地点で得られた観測値に変換する行列（観測行列）を H とすると、

$$J = (\tilde{x} - \tilde{z})^T B^{-1} (\tilde{x} - \tilde{z}) + (\tilde{y} - H\tilde{z})^T R^{-1} (\tilde{y} - H\tilde{z}) \quad [14]$$

と定義できる。ここで、第一推定値、解析値の格子点の数を m 、観測地点の数を n とすると、 $\tilde{x}$ 、 $\tilde{z}$ は m 次元、 $\tilde{y}$ は n 次元のベクトル、 B は $m \times m$ 、 R は $n \times n$ 、 H は $n \times m$ の行列であることに注意する。 J を z_i で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial z_i} &= -\{B^{-1}(\tilde{x}-\tilde{z})\}_i - \left[\{(\tilde{x}-\tilde{z})^T B^{-1}\}^T \right]_i - \{H^T R^{-1}(\tilde{y}-H\tilde{z})\}_i - \left[\{(\tilde{y}-H\tilde{z})^T R^{-1}H\}^T \right]_i \\ \frac{\partial J}{\partial z_i} &= -2\{B^{-1}(\tilde{x}-\tilde{z})\}_i - 2\{H^T R^{-1}(\tilde{y}-H\tilde{z})\}_i\end{aligned}\quad [15]$$

となる。 J が最小になるとき、すべての z_i について、

$$\frac{\partial J}{\partial z_i} = 0$$

が成り立つから、

$$B^{-1}(\tilde{x}-\tilde{z}) + H^T R^{-1}(\tilde{y}-H\tilde{z}) = \vec{0} \quad [16]$$

と書ける。[16]を変形すると、

$$(B^{-1} + H^T R^{-1} H)(\tilde{z} - \tilde{x}) = H^T R^{-1}(\tilde{y} - H\tilde{x}) \quad [17]$$

となる。さらに、[17]の右辺は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}H^T R^{-1}(\tilde{y} - H\tilde{x}) &= H^T R^{-1}(HBH^T + R)(HBH^T + R)^{-1}(\tilde{y} - H\tilde{x}) \\ &= (H^T R^{-1}HBH^T + H^T)(HBH^T + R)^{-1}(\tilde{y} - H\tilde{x}) \\ &= (H^T + H^T R^{-1}HBH^T)(HBH^T + R)^{-1}(\tilde{y} - H\tilde{x}) \\ &= (B^{-1} + H^T R^{-1}H)BH^T(HBH^T + R)^{-1}(\tilde{y} - H\tilde{x})\end{aligned}$$

したがって、[17]は、

$$(B^{-1} + H^T R^{-1}H)(\tilde{z} - \tilde{x}) = (B^{-1} + H^T R^{-1}H)BH^T(HBH^T + R)^{-1}(\tilde{y} - H\tilde{x})$$

と表せる。両辺に左から $(B^{-1} + H^T R^{-1}H)^{-1}$ をかけると、

$$\tilde{z} = \tilde{x} + BH^T(HBH^T + R)^{-1}(\tilde{y} - H\tilde{x}) \quad [18]$$

が得られる。[18]によって、評価関数 J を最小になるような解析値 $\tilde{z}$ を求めることができる。

「第一推定値」は必ずしもモデルの予報値であるとは限らない。たとえば、海洋の水温分布について、気候平均値を第一推定値とし、それに観測データを取りこむことによって、特定の月の水温分布の最適な解析値を求めることがある。

課題 6.2 水平2次元空間において、海面気圧の予報変数 p_i ($i=16(m-1)+l$) ($l, m=1, 2, \dots, 16$) が分布しているとする。 p の第一推定値の誤差の分散共分散行列 B は

$$b_{ij} = \epsilon_B \times \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{|l_i - l_j|^2 + |m_i - m_j|^2}{r_0^2} \right]$$

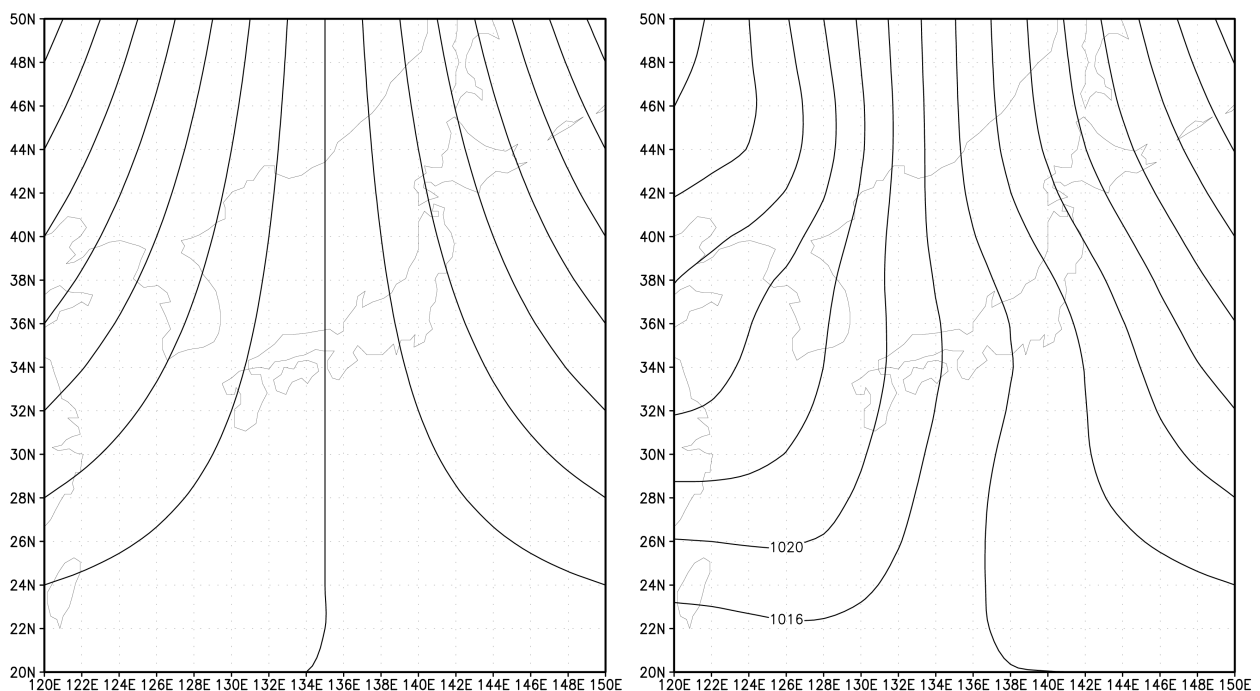
である。 $|l_i - l_j|^2 + |m_i - m_j|^2$ は緯度経度座標上での2点間の距離の2乗に相当する。ただし、 $\epsilon_B = 16.0$ 、影響半径 r_0 は $r_0 = 2.0$ とする。また、観測値の誤差の分散共分散行列 R は、

$$r_{ij} = \begin{cases} \epsilon_R & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

である。ただし、 $\epsilon_R=1.0$ とする。第一推定値は、x.ct1、x.dat で与えられている。領域は北緯 20°~50°、東経 120°~150°、格子間隔は東西、南北とも 2°、格子点数は 16×16=256 である。格子番号は領域の南西端から東向きに定義されている。第一推定値は、北西端で 1042 hPa、北東端で 982 hPa、南端で 1012 hPa である。一方、観測値は以下の表のように与えられている。

地点 番号	(地点名)	北緯 [°]	東経 [°]	東西格子番号 (L)	南北格子番号 (M)	格子番号	観測値 [hPa]
1	那覇	26	128	5	4	53	1020.0
2	福岡	34	130	6	8	118	1022.0
3	東京	36	140	11	9	139	1010.0
4	札幌	44	142	12	13	204	1000.0
5	長春	44	126	4	13	196	1034.0
6	上海	32	122	2	7	98	1028.0

このとき、最適な解析値を求めよ。計算結果は、解析値の分布図として示せ。計算に用いたプログラム(report06_2.f または report06_2.c)と図(report06_2.ps)を提出せよ。



第一推定値（左）と解析値（解答例）（右）