気象学特論（ｂａ）（ローカル気象学）（2016 年度春学期）
最終テスト

注意：特に指示がない限り、計算問題においては計算過程も示すこと。

１．水平対流について、以下の問いに答えよ。

（１）水平 - 鉛直面内（x - z 平面内）での大気の定常な運動を、ブシネスク方程式系を用いて表すと以下のようになる。ただし、基本場は静止とし、偏差場については微小振幅を考えることによって線形化している。

$$0 = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}p' + \nu\nabla^2 u \qquad ①$$

$$0 = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}p' + g\frac{\theta'}{\theta_0} + \nu\nabla^2 w \qquad ②$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial z}w = 0 \qquad ③$$

$$w\bar{\theta}_z = \kappa\nabla^2\theta' \qquad ④$$

ここで、u は水平風、w は鉛直風、p' は気圧偏差、θ' は温位偏差である。また、ρ_0 は密度の代表値、θ_0 は温位の代表値、ν は粘性係数、κ は熱拡散係数、g は重力加速度であり、いずれも時刻や場所によらず一定である。$\bar{\theta}_z$ は基本場の温位の鉛直勾配であり、これも一定値（正の値）をとる。①、②から、p' を消去し、u 、w 、θ' に関する偏微分方程式を導け。

ヒント：①を z で偏微分し、②を x で偏微分せよ。

（２）（１）の結果と④から、θ' を消去し、u 、w に関する偏微分方程式を導け。ただし、ブラント・ヴァイサラ振動数の定義式 $N^2 = \frac{g}{\theta_0}\bar{\theta}_z$ を用いることによって、g 、θ_0、$\bar{\theta}_z$ を使わずに表せ。

ヒント：（１）の結果に ∇^2 を作用させよ。

（３）（２）の結果と③から、u を消去し、w に関する偏微分方程式を導け。

（４）水平対流の水平スケールは鉛直スケールに比べて非常に大きい。そこで、（３）の結果において、∇^2 を $\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ に置き換えると、

$$\kappa\nu\frac{\partial^6}{\partial z^6}w + N^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}w = 0 \qquad ⑤$$

が得られる。ここで、波型を仮定して、

$$w = \hat{w}(z)\exp[ikx] \qquad ⑥$$

とおくことによって、$\hat{w}(z)$ についての常微分方程式を導け。

（５）（４）で得られた常微分方程式は、一般には

$$\hat{w} = C\exp[\lambda z]$$（C は任意の定数）

という解を持つ。ただし

$$\lambda = \pm\sqrt[6]{\frac{N^2k^2}{\kappa\nu}},\ \sqrt[6]{\frac{N^2k^2}{\kappa\nu}}\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\ \sqrt[6]{\frac{N^2k^2}{\kappa\nu}}\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

である。ここで、境界条件として、

$$\hat{w}\to 0\ \ (z\to+\infty)$$

$$\hat{w} = 0\ \ (z=0)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\hat{w} = 0\ \ (z=0)$$

を与えると、

$$\hat{w} = C\left\{\sqrt{3}\exp[-nz] + \exp\left[-\frac{1}{2}nz\right]\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}nz - \sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}nz\right)\right\} \qquad ⑦$$

$$\left(n = \sqrt[6]{\frac{N^2k^2}{\kappa\nu}}\right)$$

という解が得られる。⑦について、$\dfrac{d}{dz}\hat{w}$ を計算し、$z=0$ のとき $\dfrac{d}{dz}\hat{w} = 0$ となることを確かめよ。

２．接地境界層について、以下の問いに答えよ。

（１）接地境界層内では、乱流運動量フラックスに対応した物理量である摩擦速度u_* [m/s]が鉛直方向に一定であると考えられる。とくに、中立成層の場合には、

$$u_* = kz\frac{d\bar{u}}{dz} \qquad (=\text{一定}) \qquad ①$$

と表せる。ただし、$\bar{u}$ [m/s]は平均風速であり、高度z [m]のみの関数である（平均風の吹く方向に座標軸を定義するので$\bar{u} > 0$である）。また、kはカルマン定数（正の定数）である。①を解いて、$\bar{u}(z)$を求めよ。ただし、$\mathrm{z} = \mathrm{z}_0$で$\bar{u} = 0$とする。

（２）（１）で得られた解において、高度 10 m での風速をU_{10} [m/s]としたとき、乱流運動量フラックスの大きさ$|u'w'| = u_*{}^2$ [m²/s²]を、k、z_0、U_{10}で表せ。

（３）①は、

$$\frac{kz}{u_*}\frac{d\bar{u}}{dz} = 1$$

と変形できる。この関係は中立成層の場合しか成り立たない。安定成層の場合には、

$$\frac{kz}{u_*}\frac{d\bar{u}}{dz} = 1 + 7\frac{z}{L} \qquad ②$$

であることが知られている。ただし、L [m]はオブコフ長とよばれる定数であり、安定成層の場合は正である。②を解いて、$\bar{u}(z)$を求めよ。ただし、$\mathrm{z} = \mathrm{z}_0$で$\bar{u} = 0$とする。

（余白）

３．内部重力波と山岳波について、以下の問いに答えよ。

（１）水平 - 鉛直面内（x - z 平面内）での大気の定常な運動を、ブシネスク方程式系を用いて表すと以下のようになる。ただし、基本場は一様な水平風U（>0）とし、偏差場については微小振幅を考えることによって線形化している。粘性や熱拡散の効果は無視している。

$$U\frac{\partial}{\partial x}u' = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}p'$$

$$U\frac{\partial}{\partial x}w' = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}p' + g\frac{\theta'}{\theta_0}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u' + \frac{\partial}{\partial z}w' = 0$$

$$U\frac{\partial}{\partial x}\theta' + w'\overline{\theta}_z = 0$$

ただし、u' は水平風偏差、w' は鉛直風、p' は気圧偏差、θ' は温位偏差である。また、ρ_0 は密度の代表値、θ_0 は温位の代表値、g は重力加速度であり、いずれも時刻や場所によらず一定である。$\overline{\theta}_z$ は基本場の温位の鉛直勾配であり、これも一定値（正の値）をとる。ここで、$\dfrac{p'}{\rho_0}$ をあらためて p' とおき、さらに、$\dfrac{\theta'}{\overline{\theta}_z}$ をあらためて θ' とおくと、以上の方程式系は、

$$U\frac{\partial}{\partial x}u' + \frac{\partial}{\partial x}p' = 0 \quad ①$$

$$U\frac{\partial}{\partial x}w' - N^2\theta' + \frac{\partial}{\partial z}p' = 0 \quad ②$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u' + \frac{\partial}{\partial z}w' = 0 \quad ③$$

$$w' + U\frac{\partial}{\partial x}\theta' = 0 \quad ④$$

のように書くことができる。ただし、$N^2 = \dfrac{g}{\theta_0}\overline{\theta}_z$（$N > 0$）とした。波型を仮定して

$$u' = \mathrm{Re}\,\hat{u}\exp[i(kx+mz)]$$

$$w' = \mathrm{Re}\,\hat{w}\exp[i(kx+mz)]$$

$$\theta' = \mathrm{Re}\,\hat{\theta}\exp[i(kx+mz)]$$

$$p' = \mathrm{Re}\,\hat{p}\exp[i(kx+mz)]$$

とおくと（$k>0$）、方程式系①〜④は、行列を用いて以下のように書ける。

$$\begin{pmatrix} ikU & 0 & 0 & ik \\ 0 & ikU & -N^2 & im \\ ik & im & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ikU & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{w} \\ \hat{\theta} \\ \hat{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad ⑤$$

ゼロベクトルではない $\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{w} \\ \hat{\theta} \\ \hat{p} \end{pmatrix}$ が方程式⑤をみたすためには、行列 $\begin{pmatrix} ikU & 0 & 0 & ik \\ 0 & ikU & -N^2 & im \\ ik & im & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ikU & 0 \end{pmatrix}$ の行列式はゼロでなければならない。この条件を用いて、k、m、N、U がみたすべき関係式を求めよ。

ヒント：行列 $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & d & c \\ b & c & 0 & 0 \\ 0 & e & a & 0 \end{pmatrix}$ の行列式は、$a^2c^2 + a^2b^2 - b^2de$ である。

（２）（１）の結果を用いて、鉛直構造が波型、つまり、鉛直波数 m がゼロ以外の実数であるための条件を求め、k、N、U で表せ。