気象学特論（ｂａ）（2014 年度春学期）
最終テスト

注意：特に指示がない限り、計算問題においては計算過程も示すこと。

１．エクマン境界層について、以下の問いに答えよ。

（１）北半球においては、粘性係数が一定という条件のもとでは、定常なエクマン境界層内の風速の x 成分（東西成分）u と y 成分（南北成分）v は、

$$u=u_0\left(1-e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}\right)-v_0e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H} \qquad ①$$

$$v=u_0e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}+v_0\left(1-e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}\right) \qquad ②$$

と書ける。ただし、

$$H=\sqrt{\frac{\mu}{f}}$$

である。ここで、 f はコリオリ係数、μ は粘性係数である。u_0、v_0 は地衡風の x 成分、y 成分であって、x 、y に依存するが高度 z には依存しない。また、x 、y の値にかかわらず、地衡風の水平発散は常にゼロであり、

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}=0 \qquad ③$$

が成り立っている。このとき、①、②、③より、$\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}$ を求めよ。

（２）エクマン境界層上端での鉛直流 w_E は、

$$w_E = -\int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz \qquad ④$$

と表される。（１）の結果を④に代入することによって、w_E を求めよ。ただし、

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin t dt = \frac{1}{2} \qquad ⑤$$

を用いてよい。

２．接地境界層について、以下の問いに答えよ。

（１）接地境界層内では、乱流運動量フラックスに対応した物理量である摩擦速度u_*が鉛直方向に一定であると考えられる。とくに、中立成層の場合には、

$$u_* = kz\frac{d\bar{u}}{dz} \qquad (= \text{一定}) \qquad ①$$

と表せる。ただし、$\bar{u}$ は平均風速で高度zのみの関数である（平均風の吹く方向に座標軸を定義するので$\bar{u} > 0$ である）。また、k はカルマン定数（正の定数）である。①を解くと、

$$\bar{u} = \frac{u_*}{k}\ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \qquad ②$$

が得られる。ただし、z_0 は粗度とよばれ、地表面の条件によって決まる正の定数である。中立成層の接地境界層内において、$z = 2\,\mathrm{m}$ で $\bar{u} = a\,\mathrm{m/s}$、$z = 8\,\mathrm{m}$ で $\bar{u} = b\,\mathrm{m/s}$（$0 < a < b$）のとき、粗度 z_0 を a、b を用いて表せ。

（２）２つの中立成層の接地境界層Ｐ、Ｑを比較したところ、高度８ｍおける$\bar{u}$ の値は等しかった。一方、高度２ｍにおける$\bar{u}$ の値はＰのほうが大きかった。このとき、粗度 z_0 の値が大きいのはＰ、Ｑのうちのどちらか、（１）の結果を用いて答えよ。導出過程も示すこと。

（３）（１）において、摩擦速度u_*をk、a、b、$\ln 2$ を用いて表せ。

ヒント：②を用いよ。

３．内部重力波について、以下の問いに答えよ。

（１）水平 - 鉛直面内（x - z 平面内）での大気の運動をブシネスク方程式系によって表すと以下のようになる。ただし、基本場は静止とし、じょう乱場については微小振幅を考えることによって線形化している。

$$\frac{\partial}{\partial t}u=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}p' \qquad ①$$

$$\frac{\partial}{\partial t}w=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}p'+g\frac{\theta'}{\theta_0} \qquad ②$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u+\frac{\partial}{\partial z}w=0 \qquad ③$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta'+w\overline{\theta}_z=0 \qquad ④$$

ここで、u は水平風、w は鉛直風、p' は気圧偏差、θ' は温位偏差である。また、ρ_0 は密度の代表値、θ_0 は温位の代表値、R は気体定数、g は重力加速度であり、いずれも時刻 t や場所によらず一定である。$\overline{\theta}_z$ は基本場の温位の鉛直勾配であり、これも一定値（正の値）をとる。①、②から、p' を消去し、u 、w 、θ' に関する微分方程式を導け。ただし、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x}w-\frac{\partial}{\partial z}u\right)=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

の形で答えること。

ヒント：①を z で偏微分し、②を x で偏微分せよ。

（２）（１）において $\frac{\partial}{\partial x}w-\frac{\partial}{\partial z}u$ は、x - z 平面内での渦度と考えられるので、

$$\xi=\frac{\partial}{\partial x}w-\frac{\partial}{\partial z}u \qquad ⑤$$

とおくことにする。ところで、③より x - z 平面内での発散がゼロだから、u 、w は流線関数 Ψ を用いて、

$$u = -\frac{\partial}{\partial z}\Psi, \quad w = \frac{\partial}{\partial x}\Psi \qquad ⑥$$

と表すことができる。ξ の定義式⑤に⑥を代入することによって、ξ を u 、w の代わりに Ψ を用いて表せ。$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ を ∇^2 と書いてよい。

（3）（2）を用いて、（1）で答えた微分方程式を Ψ と θ' のみの微分方程式に書きかえよ。答えのみ記せばよい。

（4）⑥を用いて、④を Ψ と θ' のみの微分方程式に書きかえよ。答えのみ記せばよい。

（5）（3）と（4）で答えた微分方程式系から、θ' を消去し、Ψ のみの微分方程式を導け。$g\frac{\bar{\theta}_z}{\theta_0}$ を N^2 と書いてよい。

ヒント：（3）で答えた微分方程式を t で偏微分し、（4）で答えた微分方程式を x で偏微分せよ。

（6）（5）で答えた微分方程式において、波型を仮定して

$$\Psi = \mathrm{Re}\,\hat{\Psi}\exp\left[i(kx+mz-\omega t)\right] \qquad (k\neq 0,\ m\neq 0,\ \omega\neq 0)$$

とおくことにより、k 、m 、ω の間の関係式を求めよ。ただし、

$$\omega^2 = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

の形で答えること。