１０　山岳波

山岳波とは、気流が山を越えるときに生じる内部重力波である。水平方向の位相速度が風速と逆向きであるため、たがいに相殺して、地上から観測すると停滞しているようにみえる。このような山岳波の特性は、風速や成層度によって変化する。以下では、内部重力波の中でも山岳波に限定して、その特性を詳しく議論する。

１０．１　スコーラーの方程式

ブシネスク方程式系において、 y 方向に一様な場を考える。基本場としては、高度のみに依存する東西風 $\bar{u}=\bar{u}(z)$ を与える。微小振幅を仮定し、 $u=\bar{u}+u'$ 、 $v=v'$ 、 $w=w'$ とする。コリオリ力を無視すると、運動方程式と連続の式、熱力学方程式は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)u'+w'\frac{d\bar{u}}{dz}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}p' \qquad [1]$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)w'=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}p'+g\frac{\theta'}{\theta_0} \qquad [2]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u'+\frac{\partial}{\partial z}w'=0 \qquad [3]$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\theta'+w'\frac{d\bar{\theta}}{dz}=0 \qquad [4]$$

と書ける。

[1]を z で偏微分すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial z}u'+\frac{d\bar{u}}{dz}\frac{\partial}{\partial x}u'+\frac{d\bar{u}}{dz}\frac{\partial}{\partial z}w'+w'\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}p' \qquad [5]$$

となるが、[3]を用いると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial z}u'+w'\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}p' \qquad [6]$$

が得られる。一方、[2]を x で偏微分すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}w'=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}p'+\frac{g}{\theta_0}\frac{\partial}{\partial x}\theta' \qquad [7]$$

が得られる。[6]－[7]を計算して、 p' を消去すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}u'-\frac{\partial}{\partial x}w'\right)+w'\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}=-\frac{g}{\theta_0}\frac{\partial}{\partial x}\theta' \qquad [8]$$

となる。両辺に $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ を作用させると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial z}u'-\frac{\partial}{\partial x}w'\right)+\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)w'=-\frac{g}{\theta_0}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\theta' \qquad [9]$$

が得られるが、[4]を代入して、 θ' を消去すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial z}u'-\frac{\partial}{\partial x}w'\right)+\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)w'=\frac{g}{\theta_0}\frac{d\bar{\theta}}{dz}\frac{\partial}{\partial x}w' \tag{9}$$

となって、ブラント・バイサラ振動数 N^2 を用いると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial z}u'-\frac{\partial}{\partial x}w'\right)+\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)w'=N^2\frac{\partial}{\partial x}w' \tag{10}$$

と書ける。両辺を x で偏微分すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}u'-\frac{\partial^2}{\partial x^2}w'\right)+\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}w'=N^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}w' \tag{11}$$

となり、[3]を代入して、 u' を消去すると、

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)w'+\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}w'=N^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}w'$$

となって、

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)w'-N^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}w'+\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}w'=0 \tag{12}$$

が得られる。

波が[12]を満たすための条件を考える。鉛直風 w の場について、水平方向と時間方向に波型を仮定して、

$$w=\hat{w}(z)\exp[i(kx-\omega t)] \quad (k>0) \tag{13}$$

とする。ただし、 k は東西波数、 ω は角振動数である。[13]を[12]に代入すると、

$$(-i\omega+ik\bar{u})^2\left(-k^2+\frac{d^2}{dz^2}\right)\hat{w}+N^2(-k^2)\hat{w}+\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}(-i\omega+ik\bar{u})(ik)\hat{w}=0$$

となるので、

$$(\omega-k\bar{u})^2\left(-k^2+\frac{d^2}{dz^2}\right)\hat{w}+N^2k^2\hat{w}+\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}(\omega-k\bar{u})k\hat{w}=0 \tag{14}$$

が得られる。両辺を k^2 で割ると、

$$\left(\frac{\omega}{k}-\bar{u}\right)^2\left(-k^2+\frac{d^2}{dz^2}\right)\hat{w}+N^2\hat{w}+\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}\left(\frac{\omega}{k}-\bar{u}\right)\hat{w}=0$$

となる。ここで、水平方向の位相速度は $c=\dfrac{\omega}{k}$ だから、

$$(\bar{u}-c)^2\left(-k^2+\frac{d^2}{dz^2}\right)\hat{w}+\left\{N^2-\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}(\bar{u}-c)\right\}\hat{w}=0$$

が得られる。さらに、両辺を $(\bar{u}-c)^2$ で割ると、

$$\frac{d^2}{dz^2}\hat{w}+\left\{\frac{N^2}{(\bar{u}-c)^2}-\frac{1}{\bar{u}-c}\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}-k^2\right\}\hat{w}=0 \tag{15}$$

となる。スコーラー数 l を、

$$l^2 = \frac{N^2}{(\bar{u}-c)^2} - \frac{1}{\bar{u}-c}\frac{d^2\bar{u}}{dz^2} \qquad [16]$$

と定義すると、[15]は、

$$\frac{d^2}{dz^2}\hat{w} + (l^2 - k^2)\hat{w} = 0 \qquad [17]$$

と書ける。これを**スコーラーの方程式**(Scorer's equation)という。スコーラーの方程式は、内部重力波の鉛直構造がみたすべき条件を示している。気流が山を越えるときに生じる定常的な内部重力波の場合、地表面からみた位相速度は $c=0$ である。このような内部重力波を**山岳波**(mountain wave)という。

１０．２　伝播する波と減衰する波

スコーラー数 l が一定であるとすれば、[17]は定数係数の線形 2 階常微分方程式になる。このとき、方程式[17]の解は、鉛直方向に波型（$l>k$ の場合）または指数関数型（$l<k$ の場合）になる。このようにスコーラーの方程式の解の特性はスコーラー数や水平波数によって変化し、鉛直方向に伝播する波型になる場合と、鉛直方向に減衰する指数関数型になる場合がある。

簡単のため、$c=0$、かつ $\bar{u}$ (>0) は高度によらず一定とすると、スコーラーの方程式[15]は、

$$\frac{d^2}{dz^2}\hat{w} + \left(\frac{N^2}{\bar{u}^2} - k^2\right)\hat{w} = 0 \qquad [18]$$

と表せる。以下では、この条件のもとで、山岳波の鉛直構造が水平波数 k によってどのように変化するか考える。

ここで、鉛直方向にも波型となる場合の分散関係式を確認しておく。

$$w = \hat{w}\exp[i(kx + mz - \omega t)] \quad (k>0) \qquad [19]$$

とする。ただし、m は鉛直波数である。$\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}=0$ であることに注意して、[19]を[14]に代入すると、

$$(\omega - \bar{u}k)^2 = \frac{N^2 k^2}{k^2 + m^2} \qquad [20]$$

となって、

$$\omega = \bar{u}k \pm \frac{Nk}{\sqrt{k^2+m^2}} \qquad [21]$$

が得られる。いま、$c=0$ を仮定しているから、$\omega=0$ である。$\omega=0$ のときに[21]が成り立つためには、[21]の複号は、

$$\omega = \bar{u}k - \frac{Nk}{\sqrt{k^2+m^2}} \qquad [22]$$

でなければならない。

はじめに、$k<\dfrac{N}{\bar{u}}$ の場合、つまり、波長が十分に長い場合を考える。このとき、スコーラー数 l は k よりも大きくなっている。[18]において、

$$m^2=\frac{N^2}{\bar{u}^2}-k^2 \qquad [23]$$

とおくと、

$$\frac{d^2}{dz^2}\hat{w}+m^2\hat{w}=0 \qquad [24]$$

だから、

$$\hat{w}=w_0\exp[imz] \qquad [25]$$

$$w=w_0\exp[i(kx+mz-\omega t)] \qquad [26]$$

が得られる。[26]より、内部重力波の構造は、鉛直方向にも波数 m の波型になっていることがわかる。山岳波の場合、波のエネルギー源は地表面にあるので、群速度の鉛直成分は正、つまり、[22]で $c_{gz}=\dfrac{\partial\omega}{\partial m}>0$ だから、、

$$c_{gz}=\frac{\partial\omega}{\partial m}=\frac{N\,km}{\left(k^2+m^2\right)^{3/2}}>0 \qquad [27]$$

となって、$m>0$ だから、

$$m=\sqrt{\frac{N^2}{\bar{u}^2}-k^2} \qquad [28]$$

である。[26]は鉛直方向に伝播する内部重力波を表しているといえる。

次に、$k>\dfrac{N}{\bar{u}}$ の場合、つまり、波長が十分に短い場合を考える。このとき、スコーラー数 l は k よりも小さくなっている。[18]において、

$$m^2=k^2-\frac{N^2}{\bar{u}^2} \qquad [29]$$

とおくと、

$$\frac{d^2}{dz^2}\hat{w}-m^2\hat{w}=0 \qquad [30]$$

だから、

$$\hat{w}=w_0e^{mz} \qquad [31]$$

$$w=w_0e^{mz}\exp[i(kx-\omega t)] \qquad [32]$$

が得られる。[32]より、内部重力波の構造は、鉛直方向には指数関数型になっていることがわかる。山岳波の場合、エネルギー源は地表面にあるので、無限上方で振幅はゼロに収束、つまり、$z\to+\infty$ で $w\to0$ だから、$m<0$ である。したがって、

$$m = -\sqrt{k^2 - \frac{N^2}{\bar{u}^2}} \qquad [33]$$

である。[32]は鉛直方向に減衰する内部重力波を表しているといえる。

以上の結果から、山の水平幅が大きい場合には鉛直方向に伝播する山岳波が、小さい場合には鉛直方向に減衰する山岳波が生じることがわかる。

１０．３　風下山岳波

基本場の水平風速に鉛直シアがある場合に、山岳波の鉛直構造を考える。ここでは、下層で基本場の水平風速 $\bar{u}$ が小さく、上層に行くにつれて大きくなる場合を想定する。この場合、[16]で定義したスコーラー数 l は、下層で大きく、上層に行くにつれて小さくなっている。このため、水平波数 k が一定の範囲にあるときには、下層からある高度までは $l^2 - k^2 > 0$ であって伝播する山岳波、ある高度を超えると $l^2 - k^2 < 0$ となって減衰する山岳波になる。

鉛直方向に伝播する山岳波の場合において、波の伝播特性を考える。基本場の水平風速の鉛直シア $\frac{d\bar{u}}{dz}$ が一定であれば $\frac{d^2\bar{u}}{dz^2} = 0$ だから、分散関係式として[22]を用いることができる。[22]に $\omega = 0$ を代入すると、

$$\bar{u}k - \frac{Nk}{\sqrt{k^2 + m^2}} = 0$$

となって、

$$m = \pm\sqrt{\frac{N^2}{\bar{u}^2} - k^2} \qquad [34]$$

が得られる。[22]を用いて、群速度の水平成分と鉛直成分を計算すると、

$$c_{gx} = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \bar{u} - \frac{Nm^2}{\left(k^2 + m^2\right)^{3/2}} = \frac{\bar{u}^3 k^2}{N^2} \qquad [35]$$

$$c_{gz} = \frac{\partial\omega}{\partial m} = \frac{Nkm}{\left(k^2 + m^2\right)^{3/2}} = \pm\frac{\bar{u}^3 k}{N^2}\sqrt{\frac{N^2}{\bar{u}^2} - k^2} \qquad [36]$$

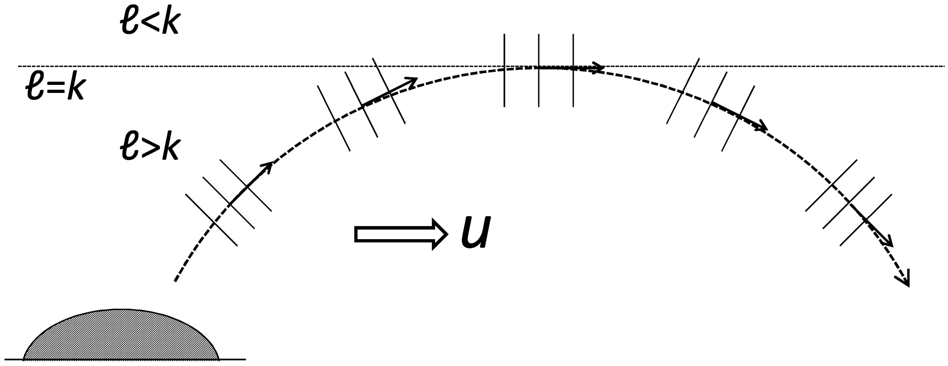
となる。[34]、[36]の複号は、上向き伝播のとき正、下向き伝播のとき負である。[35]、[36]より、群速度ベクトルの大きさは、

$$\left|\vec{c}_g\right| = \sqrt{c_{gx}^2 + c_{gz}^2} = \frac{\bar{u}^2 k}{N} \qquad [37]$$

であり、また、

$$\vec{c}_g \parallel \vec{k} \qquad [38]$$

である。さらに、伝播型から減衰型に変わる高度（ $l = k$ ）に近づくと、[34]、[36]において $l^2 - k^2 \to 0$ として、 $m \to 0$ 、 $c_{gz} \to 0$ であることがわかる。この様子を図示すると下の図のようになる。



$l=k$ となる高度で、波のエネルギーが反射されている。反射された後の波束は下向きに伝播するので、鉛直波数 m の符号が反転し、鉛直方向の位相の傾きが逆になっている。このような状況で実際に観測される波は、群速度が上向きの波と下向きの波の重ね合わせであり、鉛直方向の位相の傾きは相殺しあい、直立した波となる。このような山岳波をとくに**風下山岳波**(lee wave)とよぶことがある。風下山岳波は上向きに伝播する波と下向きに伝播する波が重なった波なので、共鳴波とみなすことができる。

問 10. 1　式[16]を用いて、ブラント・バイサラ振動数が $N=1.0\times10^{-2}$ /s、東西風速が $\bar{u}=2.0\times10$ m/s で高度によらず一定のとき、対地位相速度がゼロの山岳波に関してスコーラー数を計算せよ（有効数字 2 桁）。また、このとき、水平波数が $k=2.5\times10^{-4}$ /m（波長が約 25km）の山岳波と、水平波数が $k=1.0\times10^{-3}$ /m（波長が約 6.3km）の山岳波の鉛直伝播特性（伝播型か減衰型か）を判定せよ。

問 10. 2　東西風速が地表では $\bar{u}=2.0\times10$ m/s であり、高度とともに線形に増加しているとする。水平波数が $k=2.5\times10^{-4}$ /m（波長が約 25km）の山岳波が伝播型から減衰型に変わるときの東西風速の値を求めよ（有効数字 2 桁）。ブラント・バイサラ振動数は $N=1.0\times10^{-2}$ /s とする。式[16]を用いてよい。