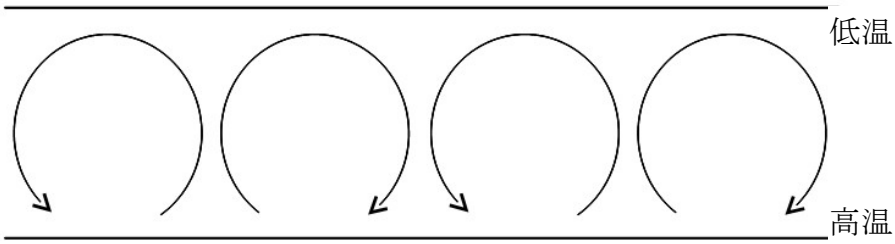
３　鉛直対流

海陸風循環のような水平対流は、安定成層が保たれた状態で生じる対流であった。現実の地球大気では、ほとんどの場合、安定成層が保たれている。しかし、たとえば、晴天日の昼間のように地面がじゅうぶんに加熱されている状況では、地面付近の大気は下層ほど温位が高い不安定成層になることがある。このような不安定成層中では、下層の高温な空気が浮力によって上昇し、上層の低温な空気が下降する。このような対流を**鉛直対流** (vertical convection)という。鉛直対流を**ベナール対流**（**ベナール・レイリー型対流**） (Benard-Rayleigh convection)とよぶこともある。



３．１　基本方程式系

ここでは鉛直対流に関して理論的な理解を試みる。平行な２枚の板に挟まれた、一定の厚さ d を持つ流体層を考える。流体層の面積はじゅうぶんに大きく、上端と下端の温度は、それぞれ水平方向に一様で時間変化しないものとする。鉛直対流においては、静水圧平衡は成り立たないので、ブシネスク方程式系を用いる。ブシネスク方程式系は、

$$\frac{D}{Dt}u=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial x}p'+\nu\nabla^2 u \qquad [1]$$

$$\frac{D}{Dt}w=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial z}p'+g\frac{\theta'}{\bar{\theta}}+\nu\nabla^2 w \qquad [2]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u+\frac{\partial}{\partial z}w=0 \qquad [3]$$

$$\frac{D}{Dt}\theta'+w\frac{d\bar{\theta}}{dz}=\kappa\nabla^2\theta' \qquad [4]$$

と書けた。以下では、微小な振幅を考えることにする。[1]、[2]、[4]は、

$$\frac{\partial}{\partial t}u=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial x}p'+\nu\nabla^2 u \qquad [5]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}w=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial z}p'+g\frac{\theta'}{\bar{\theta}}+\nu\nabla^2 w \qquad [6]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta'+w\frac{d\bar{\theta}}{dz}=\kappa\nabla^2\theta' \qquad [7]$$

のように線形化される。定常状態を考えるので、時間微分を消去して、

$$0=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial x}p'+\nu\nabla^2 u \qquad [8]$$

$$0=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial z}p'+g\frac{\theta'}{\bar{\theta}}+\nu\nabla^2 w \qquad [9]$$

$$w\frac{d\bar{\theta}}{dz}=\kappa\nabla^2\theta' \qquad [10]$$

が得られる。以下、[3]、[8]～[10]を連立偏微分方程式として解く。

３．２　連立偏微分方程式の解法

[8]を z で、[9]を x で偏微分すると、

$$0=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}p'+\nu\nabla^2\frac{\partial}{\partial z}u \qquad [11]$$

$$0=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}p'+\frac{g}{\bar{\theta}}\frac{\partial}{\partial x}\theta'+\nu\nabla^2\frac{\partial}{\partial x}w \qquad [12]$$

が得られる。[12]－[11]を計算して、p' を消去すると、

$$\nu\nabla^2\left(\frac{\partial}{\partial x}w-\frac{\partial}{\partial z}u\right)+\frac{g}{\bar{\theta}}\frac{\partial}{\partial x}\theta'=0 \qquad [13]$$

となる。両辺を x で偏微分すると、

$$\nu\nabla^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}u\right)+\frac{g}{\bar{\theta}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta'=0 \qquad [14]$$

が得られるが、[3]を用いて、u を消去すると、

$$\nu\nabla^2\nabla^2w+\frac{g}{\bar{\theta}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta'=0 \qquad [15]$$

と書ける。両辺に $\kappa\nabla^2$ をかけると、

$$\kappa\nu\nabla^2\nabla^2\nabla^2w+\kappa\frac{g}{\bar{\theta}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\nabla^2\theta'=0 \qquad [16]$$

となるが、[10]を代入して、θ' を消去すると、

$$\left(\kappa\nu\nabla^2\nabla^2\nabla^2+\frac{g}{\bar{\theta}}\frac{d\bar{\theta}}{dz}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)w=0 \qquad [17]$$

が得られる。

３．３　解の空間構造と存在条件

層の厚さ d で長さを規格化すると、$x=x_*d$、$z=z_*d$、$w=w_*d$ だから、

$$\left(\frac{\kappa\nu}{d^6}\nabla_*^2\nabla_*^2\nabla_*^2+\frac{1}{d^2}\frac{g}{\bar{\theta}}\frac{d\bar{\theta}}{dz}\frac{\partial^2}{\partial x_*^2}\right)w_*d=0$$

となって、

$$\left(\nabla_*^2\nabla_*^2\nabla_*^2+\frac{g}{\bar{\theta}}\frac{d\bar{\theta}}{dz}\frac{d^4}{\kappa\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_*^2}\right)w_*=0 \qquad [18]$$

と表せる。ここで、**レイリー数** R_a を

$$R_a=-\frac{g}{\bar{\theta}}\frac{d\bar{\theta}}{dz}\frac{d^4}{\kappa\nu} \qquad [19]$$

と定義すると、

$$\left(\nabla_*^2\nabla_*^2\nabla_*^2-R_a\frac{\partial^2}{\partial x_*^2}\right)w=0 \qquad [20]$$

と書ける。x_*、z_*、w_* をあらためて x、z、w と書くと、

$$\left(\nabla^2\nabla^2\nabla^2-R_a\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)w=0 \qquad [21]$$

と表せる。ここで、水平方向に波型を仮定して、

$$w=\hat{w}(z)\sin kx \qquad [22]$$

とすると、

$$\left[\left(-k^2+\frac{d^2}{dz^2}\right)^3+R_a k^2\right]\hat{w}=0 \qquad [23]$$

が得られる。

次に、上端($z=1$)と下端($z=0$)における境界条件を考える。上端と下端では、鉛直流はゼロだから、

$$\hat{w}=0 \qquad [24]$$

である。さらに、上端と下端で摩擦がないとすると、上端、下端では水平流の鉛直シアはゼロだから、

$$\frac{\partial}{\partial z}u=0 \qquad [25]$$

となる。[25]を x で偏微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}u=0 \qquad [26]$$

が得られる。ここで、[3]を用いると、

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}w=0 \qquad [27]$$

となって、$\hat{w}$ で表せば、

$$\frac{d^2}{dz^2}\hat{w}=0 \qquad [28]$$

と書ける。さらに、上端と下端では温度は固定されていて、温度偏差はゼロであるとすると、[15]より、

$$\nabla^2\nabla^2 w=0 \qquad [29]$$

だから、

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}-k^2\right)^2\hat{w}=0 \qquad [30]$$

となる。ここで、[24]と[28]を用いると、

$$\frac{d^4}{dz^4}\hat{w}=0 \qquad [31]$$

が得られる。

[23]は定数係数の線形常微分方程式である。このような方程式の解は、一般には指数関数や三角関数である。ここでは、境界条件[24]、[28]、[31]をみたす解として、

$$\hat{w}=C\sin n\pi z \quad (n=1,2,3,...) \qquad [32]$$

を考える。[32]を[23]に代入すると、

$$\left(-k^2-n^2\pi^2\right)^3+R_a k^2=0 \qquad [33]$$

となるので、

$$R_a=\frac{\left(k^2+n^2\pi^2\right)^3}{k^2} \qquad [34]$$

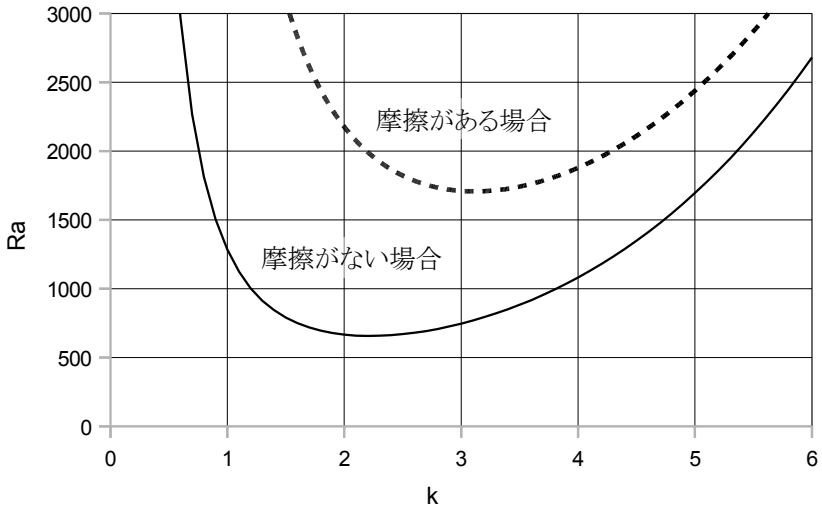
が得られる。

[34]によると、レイリー数 R_a は n と k の関数である。厳密にいえば、時間変化しない定常な対流が生じるときのレイリー数は n と k の値によって決まる。 k の値が同じであれば、$n\geq 2$ の場合に比べ $n=1$ の場合のほうが、 R_a の値は常に小さい。 R_a の値が与えられたとき、対応する n と k が存在すれば、定常な対流が生じる。 $n=1$ の場合における、 k と R_a との関係を図に実線で示した。レイリー数 R_a は、 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi=2.221$ のときに最小値 $R_{ac}=\frac{27}{4}\pi^4=657.5$ をとる。レイリー数の最小値 R_{ac} を**臨界レイリー数**(critical Rayleigh number)という。たとえ不安定成層であっても、レイリー数が臨界レイリー数よりも小さいときには、対応する k の値が存在しないので、対流は発生しない。これは、浮力によって対流を起こそうとする効果よりも、粘性によって対流を抑制しようとする効果のほうが大きいからである。

以上の議論では、理想気体を想定し、流体の体積が温位（温度）に比例することを前提とした。理想気体においては、熱膨張率（1K の温度上昇に伴って体積が増加する割合）α は、 $\alpha=\frac{1}{\bar{\theta}}$ である。液体を含む一般の流体に拡張するときは、レイリー数の定義式[19]において、 $\frac{1}{\bar{\theta}}$ を α に置き換えて

$$R_a=-\alpha g\frac{d\bar{\theta}}{dz}\frac{d^4}{\kappa\nu} \qquad [35]$$

とすればよい。



k と R_a との関係

水のような日常生活でなじみのある液体の多くは、粘性係数が非常に小さいので、たとえば、鍋に水を入れて下から火で加熱するというような状況では、レイリー数は非常に大きな値になっていることが多い。逆にいうと臨界レイリー数を実験的に求める場合には、粘性の高い流体を用いたり、上端と下端との間の距離を小さくしたりする必要がある。

さて、上端と下端で摩擦があるとすると、

$$u=0 \qquad [36]$$

となる。[36]を x で偏微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial x}u=0 \qquad [37]$$

が得られる。ここで、[3]を用いると、

$$\frac{\partial}{\partial z}w=0 \qquad [38]$$

となって、$\hat{w}$ で表せば、

$$\frac{d}{dz}\hat{w}=0 \qquad [39]$$

と書ける。上端と下端での摩擦がないとした場合の境界条件[28]は、[39]に置き換えられる。境界条件[24]、[39]、[30]をみたす $\hat{w}$ を求めるためには複雑な計算が必要である（補遺を参照）。結果は、図に点線で示した通りである（摩擦がない場合の $n=1$ に相当する解を示した）。定常な対流が生じるためのレイリー数は、摩擦がない場合よりも大きくなる。臨界レイリー数は $R_{ac}=1708$ であり、このときの波数は $k=3.117$ である。直観的には、摩擦によって対流が抑制されるので、対流が生じるためには、レイリー数がより大きくなければならないと解釈できる。現実の流体では、上端と下端に固定された壁が存在する場合には摩擦も存在するので、摩擦ありとして計算した解のほうが現実的である。

[22]ではロール状の対流を仮定していることになる。[22]の代わりに、たとえば、

$$w=\hat{w}(z)\sin kx\sin ly \qquad [40]$$

のようにした場合、つまり格子状のセルを仮定した場合であっても、x 方向の波数 k を、水平方向の全波数 $K=\sqrt{k^2+l^2}$ に置き換えれば、まったく同様の関係を導くことができる。このことは、線形論では全波数を決めることはできるが、形状は決定できないことを意味している。現実の流体実験においては、表面張力の効果によって、臨界レイリー数を超えた直後には六角形のセルが生じることが知られている。また、基本場に水平流の鉛直シアが存在する場合には、ロール状の対流が生じる。冬季に北西季節風が吹き出しているときに日本海で見られる筋状の雲は、このようなロール状の対流であると解釈されることがある。

問 3.1　厚さ 1cm の水の層において、上端に比べて下端の温度を 1K だけ高くした。このとき、レイリー数 R_a を有効数字 2 桁まで求めよ。ただし、重力加速度を $g=9.8$ m/s^2 と、水の熱膨張率を $\alpha=2.1\times10^{-4}$ /K、粘性係数を $\nu=1.0\times10^{-6}$ m^2/s とし（熱膨張率と粘性係数は 20℃における値である）、熱拡散係数 κ は粘性係数 ν に等しいと仮定せよ。

補遺　摩擦がある場合の鉛直対流

本文[21]において、鉛直流 w は、

$$\left(\nabla^2\nabla^2\nabla^2 - R_a\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)w=0 \qquad [1]$$

と表せた。 x 方向に波型を仮定し、

$$w=\hat{w}(z)\sin kx \qquad [2]$$

として、[1]に代入すると、

$$\left[\left(-k^2+\frac{d^2}{dz^2}\right)^3+R_a k^2\right]\hat{w}=0 \qquad [3]$$

が得られる。 $\hat{w}=e^{i\lambda z}$ とおくと、

$$\left[\left(-k^2-\lambda^2\right)^3+R_a k^2\right]\hat{w}=0 \qquad [4]$$

だから、

$$\lambda^2=-k^2+\sqrt[3]{R_a k^2},\quad -k^2+\sqrt[3]{R_a k^2}\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \qquad [5]$$

となって、

$$\lambda=\pm\alpha,\quad \pm(\beta\pm i\gamma) \qquad [6]$$

が得られる。ただし、

$$\alpha=\sqrt{-k^2+\sqrt[3]{R_a k^2}} \qquad [7]$$

$$\beta=\Re\sqrt{-k^2+\sqrt[3]{R_a k^2}\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} \qquad [8]$$

$$\gamma=\Im\sqrt{-k^2+\sqrt[3]{R_a k^2}\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} \qquad [9]$$

である。ここで、上端を $z=\frac{1}{2}$ 、下端を $z=-\frac{1}{2}$ とおき、対称性を考慮すると、

$$\hat{w}=A\cos\alpha z+B\cosh\gamma z\cos\beta z+C\sinh\gamma z\sin\beta z \qquad [10]$$

と書ける。

次に、上端($z=\frac{1}{2}$)と下端($z=-\frac{1}{2}$)における境界条件を考える。上端と下端では、鉛直流はゼロだから、

$$\hat{w}=0 \qquad [11]$$

である。さらに、上端と下端で摩擦があるとすると、上端、下端では水平風速はゼロだから、

$$u=0 \qquad [12]$$

となる。[12]を x で偏微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial x}u=0 \qquad [13]$$

が得られる。ここで、連続の式（本文[3]）を用いると、

$$\frac{\partial}{\partial z}w=0 \qquad [14]$$

となって、$\hat{w}$ で表せば、

$$\frac{d}{dz}\hat{w}=0 \qquad [15]$$

と書ける。さらに、上端と下端では温度は固定されていて、温度偏差はゼロであるとすると、本文[15]より、

$$\nabla^2\nabla^2 w=0 \qquad [16]$$

だから、

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}-k^2\right)^2\hat{w}=0 \qquad [17]$$

となる。ここで、[11]を用いると、

$$\left(\frac{d^4}{dz^4}-2k^2\frac{d^2}{dz^2}\right)\hat{w}=0 \qquad [18]$$

が得られる。

ここで、[7]より、

$$\hat{w}'=Ac_{11}+Bc_{12}+Cc_{13} \qquad [19]$$

ただし、

$$\begin{aligned} c_{11}&=-\alpha\sin\alpha z \\ c_{12}&=-\beta\cosh\gamma z\sin\beta z+\gamma\sinh\gamma z\cos\beta z \\ c_{13}&=\beta\sinh\gamma z\cos\beta z+\gamma\cosh\gamma z\sin\beta z \end{aligned} \qquad [20]$$

同様に、

$$\hat{w}''=Ac_{21}+Bc_{22}+Cc_{23} \qquad [21]$$

ただし、

$$\begin{aligned} c_{21}&=-\alpha^2\cos\alpha z \\ c_{22}&=\left(\gamma^2-\beta^2\right)\cosh\gamma z\cos\beta z-2\beta\gamma\sinh\gamma z\sin\beta z \\ c_{23}&=\left(\gamma^2-\beta^2\right)\sinh\gamma z\sin\beta z+2\beta\gamma\cosh\gamma z\cos\beta z \end{aligned} \qquad [22]$$

また、

$$\hat{w}^{(4)}=Ac_{41}+Bc_{42}+Cc_{43} \qquad [23]$$

ただし、

$$\begin{aligned} c_{41}&=\alpha^4\cos\alpha z \\ c_{42}&=\left(\beta^4-6\beta^2\gamma^2+\gamma^4\right)\cosh\gamma z\cos\beta z-4\beta\gamma\left(\gamma^2-\beta^2\right)\sinh\gamma z\sin\beta z \\ c_{43}&=\left(\beta^4-6\beta^2\gamma^2+\gamma^4\right)\sinh\gamma z\sin\beta z+4\beta\gamma\left(\gamma^2-\beta^2\right)\cosh\gamma z\cos\beta z \end{aligned} \qquad [24]$$

が成り立つ。これらを用いると、境界条件[11]、[15]、[18]は、

$$\hat{w}\left(z=\frac{1}{2}\right)=A\cos\frac{\alpha}{2}+B\cosh\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}+C\sinh\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}=0 \qquad [25]$$

$$\hat{w}'\left(z=\frac{1}{2}\right)=A\,c_{11}\left(z=\frac{1}{2}\right)+B\,c_{12}\left(z=\frac{1}{2}\right)+C\,c_{13}\left(z=\frac{1}{2}\right)=0 \qquad [26]$$

$$\hat{w}^{(4)}\left(z=\frac{1}{2}\right)-2k^2\hat{w}''\left(z=\frac{1}{2}\right)=A\,\hat{c}_{41}\left(z=\frac{1}{2}\right)+B\,\hat{c}_{42}\left(z=\frac{1}{2}\right)+C\,\hat{c}_{43}\left(z=\frac{1}{2}\right)=0 \qquad [27]$$

ただし、

$$\hat{c}_{4i}=c_{4i}-2k^2c_{2i}\quad(i=1,2,3) \qquad [28]$$

なお、対称性より $\hat{w}$ は偶関数なので、$z=\frac{1}{2}$ での境界条件のみを考えればよい。[25]、[26]、[27]が自明な解 $A=B=C=0$ 以外の解を持つための条件は、

$$\begin{aligned}D(k,\alpha,\beta,\gamma)=&c_{12}\hat{c}_{43}\cos\frac{\alpha}{2}+c_{13}\hat{c}_{41}\cosh\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}+c_{11}\hat{c}_{42}\sinh\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\\&-c_{13}\hat{c}_{42}\cos\frac{\alpha}{2}-c_{11}\hat{c}_{43}\cosh\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}-c_{12}\hat{c}_{41}\sinh\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\\=&0\end{aligned} \qquad [29]$$

ただし、c_{1i} 、c_{2i} 、$\hat{c}_{4i}$ は $z=\frac{1}{2}$ における値を用いる。D は k 、α 、β 、γ の関数であるが、α 、β 、γ は k と R_a の関数だから、結局、D も k と R_a の関数である。したがって、k と R_a との関係は、

$$D(k,R_a)=0 \qquad [30]$$

と書くことができる。[30]を用いると摩擦がある場合の k と R_a との関係が求められる。