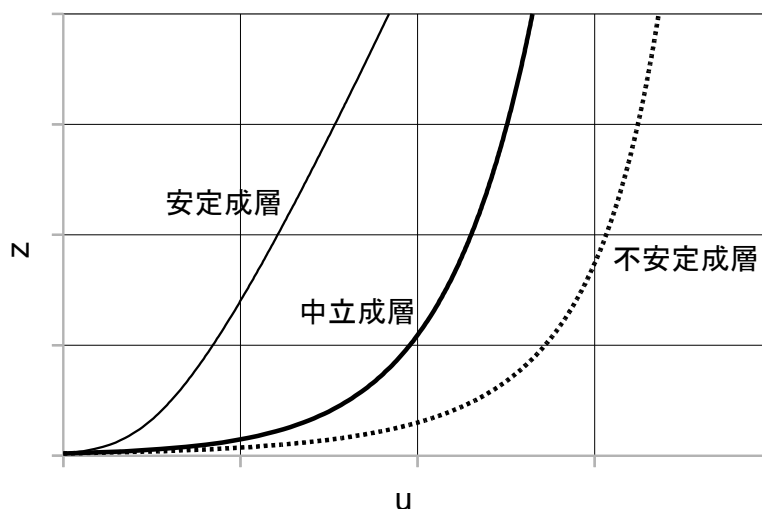


7 モニン・オブコフの相似則

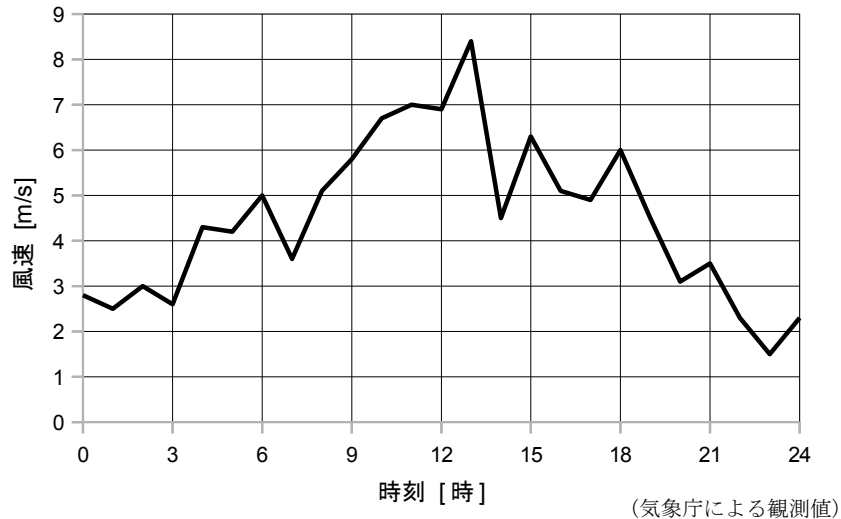
接地境界層では、中立成層のときには風速分布は対数分布則に従う。しかし、安定成層や不安定成層のときの風速分布は、中立成層の場合とは異なる。一般の成層状態における風速分布を求めるために、乱流運動エネルギー方程式における機械的な作用と浮力の作用の比率に注目して新しい相似則を導出してみる。

7. 1 密度成層と風速分布

上空での風速が同じであっても、接地境界層における風速は成層状態によって変化する。強い安定成層のときには、上空の空気との混合が進みにくいため、地上付近の風速は小さくなる。逆に、不安定成層のときには、上空の空気との混合が進むので、地上付近の風速は大きくなる。実際に、冬型の気圧配置でよく晴れているとき、地上付近が冷却されて強い安定成層になっている早朝には地上では風が弱く、昼間になって地面の加熱が進むと風は強くなる。このように、安定成層や不安定成層のときには、中立成層のときの対数分布則とは異なる風速分布がみられる。これは、安定成層のときには、鉛直スケールの大きい乱流渦ほど密度成層の影響で抑制され、逆に、不安定成層のときには、鉛直スケールの大きい乱流渦ほど浮力の効果によって強化されるからである。



成層状態による風速分布の違い



冬型の日の地上風速の日変化の例（2012年1月29日、東京）

7. 2 フラックス・リチャードソン数

乱流運動エネルギー方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{e} = -\overline{u'w'} \frac{\partial}{\partial z} \bar{u} + \frac{g}{\theta_0} \overline{w'\theta'} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{w'e} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \overline{w'p'} - \bar{\epsilon} \quad [1]$$

と書けた。右辺第1項は機械的な作用による乱流運動エネルギーの生成、第2項は浮力の作用による乱流運動エネルギーの生成・消滅を表していて、両者の比によって乱流場の特性が決まる。[1]の右辺第1項と第2項の比を

$$R_f = \frac{\frac{g}{\theta_0} \overline{w'\theta'}}{\overline{u'w'} \frac{d\bar{u}}{dz}} \quad [2]$$

と定義し、**フラックス・リチャードソン数**(flux Richardson number)という。接地境界層内では、 $\overline{u'w'}$ と $\overline{w'\theta'}$ は鉛直方向に一定であるが、 $\frac{d\bar{u}}{dz}$ は一定ではないので、 R_f も高度とともに変化する。 R_f は、安定成層のときには正、不安定成層のときには負である。いずれの場合も、絶対値は高度とともに大きくなる。これは、 $\frac{d\bar{u}}{dz}$ が高度とともに小さくなるためであり、上空に行くほど浮力の作用の効果が相対的に大きくなることを示している。

7. 3 オブコフ長

乱流の特性の変化の鉛直スケールとして、[2]の分母（機械的な作用）と分子（浮力の作用）が同程度になる高さ L を定義する。[2]の分母と分子が等しいとすると、

$$\overline{u'w'} \frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{g}{\theta_0} \overline{w'\theta'} \quad [3]$$

中立成層の場合、接地境界層内では、

$$u_* = kz \frac{d\bar{u}}{dz} \quad [4]$$

が成り立つから、

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{1}{kz} u_* = \frac{1}{kz} |\overline{u'w'}|^{1/2} \quad [5]$$

である。中立成層でない場合においても、近似的に[5]を用いると、[3]は、

$$\frac{1}{kz} |\overline{u'w'}|^{3/2} = \frac{g}{\theta_0} \overline{w'\theta'} \quad [6]$$

と書ける。ここで、 $z=L$ とすると、

$$L = -\frac{1}{k} \frac{|\overline{u'w'}|_s^{3/2}}{\frac{g}{\theta_0} (\overline{w'\theta'})_s} \quad [7]$$

が得られる。 L を**オブコフ長**(Obukhov length)という。一般には、 L は接地境界層の厚さより大きくなることがあるが、 $\overline{u'w'}$ と $\overline{w'\theta'}$ の値としては地表面での値を用いる。摩擦速度 u_* と摩擦温位 θ_* を

$$u_*^2 = -\overline{u'w'} \quad [8]$$

$$u_* \theta_* = \overline{w'\theta'} \quad [9]$$

と定義すれば、[7]は、

$$L = -\frac{u_*^2}{\frac{g}{\theta_0} \theta_*} \quad [10]$$

と書ける。オブコフ長 L は、浮力の作用が機械的な作用と同程度の大きさになる高さである。安定成層のときは $L > 0$ 、不安定成層のときは $L < 0$ であり、中立成層のときは $L = \pm\infty$ である。なお、接地境界層内での基本場の圧力勾配による体積変化を無視できる場合には、[7]、[10]は、

$$L = -\frac{1}{k} \frac{|\overline{u'w'}|^{3/2}}{\frac{g}{T_0} \overline{w'T'}} = -\frac{u_*^2}{\frac{g}{T_0} T_*} \quad [11]$$

と書くことができる。 T_* は摩擦温度とよばれる。

7. 4 モニン・オブコフの相似則

中立成層の場合には、[4]より、

$$\frac{kz}{u_*} \frac{d\bar{u}}{dz} = 1 \quad [12]$$

が成り立つ。[12]より風速の対数分布則を導くことができるが、これは、中立成層の場合にしか成り立たない。そこで、[12]を一般の成層の場合に拡張して、

$$\frac{kz}{u_*} \frac{d\bar{u}}{dz} = \phi_M \left(\frac{z}{L} \right) \quad [13]$$

と書く。右辺は乱流場の状態に関連した関数なので、鉛直スケールをオブコフ長 L で規

格化している。関数 ϕ_M は**普遍関数**(universal function)とよばれる。鉛直スケールを L で規格化することによって、さまざまな成層度の接地境界層に対して ϕ_M を一般的に適用できる。この相似則を**モニン・オブコフの相似則**(Monin-Obukhov similarity theory)という。

安定成層の場合、高度が高く乱流の鉛直スケールが大きいほど、密度成層に伴う復元力、つまり負の浮力の作用を受けやすくなるので、鉛直シアを大きくすることによって機械的な作用を大きくしないと定常に達しない。したがって、高度が高いほど ϕ_M の値は大きくなる。逆に、不安定成層の場合、高度が高く鉛直スケールが大きいほど、浮力の作用を受けやすくなるので、機械的な作用は小さくてよいことになる。したがって、高度が高いほど ϕ_M の値は小さくなる。関数 ϕ_M の形は実験によって求められる。いくつかの実験式が提案されているが、ここでは最も簡単な例を示す。安定成層の場合、

$$\phi_M = 1 + 7\zeta \quad (\zeta > 0) \quad [14]$$

不安定成層の場合、

$$\phi_M = (1 - 16\zeta)^{-1/4} \quad (\zeta < 0) \quad [15]$$

ただし、

$$\zeta = \frac{z}{L} \quad [16]$$

[14]を[13]に代入して、境界条件を $z=z_0$ で $\bar{u}=0$ として微分方程式を解くと、

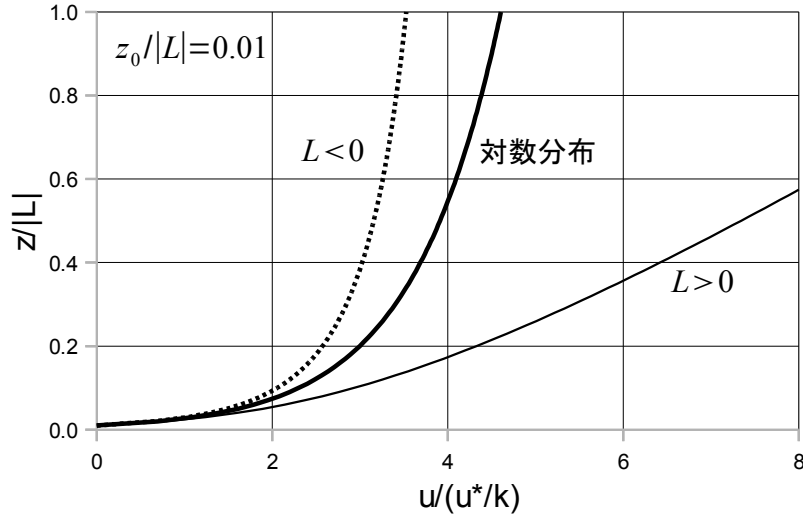
$$\bar{u} = \frac{u_*}{k} \left[\ln \left(\frac{z}{z_0} \right) + \frac{7(z-z_0)}{L} \right] \quad [17]$$

が得られる。同様に、[15]を[13]に代入して、微分方程式を解くと、

$$\bar{u} = \frac{u_*}{k} \left[2 \left(\tan^{-1} x - \tan^{-1} x_0 \right) + \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) - \ln \left(\frac{x_0-1}{x_0+1} \right) \right] \quad [18]$$

$$x = \left(1 - 16 \frac{z}{L} \right)^{1/4}, \quad x_0 = \left(1 - 16 \frac{z_0}{L} \right)^{1/4}$$

が得られる。 u_*/k を一定として[17]と[18]の概形を図示すると、次のようになる。実際の大气では、他の条件を変えずに安定度を大きくすると、 u_*/k が小さくなるので、地表面付近の風速は弱くなることに注意する。



普遍関数から計算した風速分布

温度 T （または温位 θ ）に関しても、中立成層に近い場合には、

$$T_* = kz \frac{d\bar{T}}{dz} \quad [19]$$

より、

$$-\frac{kz}{T_*} \frac{d\bar{T}}{dz} = 1 \quad [20]$$

が成り立つ。[20]より温度についても対数分布則

$$\bar{T} - T_s = -\frac{T_*}{k} \ln\left(\frac{z}{z_T}\right) \quad [21]$$

を導くことができる。ただし、 T_s は地表面温度、 z_T は熱的粗度であり、一般には $z_T < z_0$ である。[20]も、中立成層に近い場合にしか成り立たない。そこで、[20]を一般の成層の場合に拡張して、

$$-\frac{kz}{T_*} \frac{d\bar{T}}{dz} = \phi_H\left(\frac{z}{L}\right) \quad [22]$$

と書く。関数 ϕ_H は温度場に関する普遍関数である。関数 ϕ_H の形も実験によって求められていて、最も簡単な例としては、安定成層の場合、

$$\phi_H = 1 + 7\zeta \quad (\zeta > 0) \quad [23]$$

不安定成層の場合、

$$\phi_H = (1 - 16\zeta)^{-1/2} \quad (\zeta < 0) \quad [24]$$

である。

また、比湿 q に関しても同様に普遍関数が求められていて、安定成層の場合、

$$\phi_E = \phi_H = 1 + 7\zeta \quad (\zeta > 0) \quad [25]$$

不安定成層の場合、

$$\phi_E = \phi_H = (1 - 16\zeta)^{-1/2} \quad (\zeta < 0) \quad [26]$$

であり、比湿に関する粗度 z_q は $z_q = z_T$ である。

課題 7.1 [14]、[15]を[13]に代入することによって、[17]、[18]を導出せよ。

問 7.1 地上 10m の風速が 5m/s、地表面の粗度が 0.1 m である。オブコフ長が ∞ 、20m、 -20m の場合のそれぞれについて、摩擦速度を計算せよ（有効数字 2 桁）。カルマン定数は $k=0.4$ とする。普遍関数としては[14]、[15]を用いよ。