９　内部重力波

水面の上下運動として伝播するような波を外部重力波という。一般に、重力波は重力を復元力とする波のことである。その中で、外部重力波とは、水と空気のような不連続な密度の境界において生じる波動である。それに対して、密度成層をした大気のように密度が連続的に変化する基本場の中で生じる波動を内部重力波という。たとえば、気流が山岳を越えるときに波が生じることがあるが、これを山岳波とよんでいる。山岳波は内部重力波の一種である。ここでは、このような大気中の内部重力波の特性を議論する。

９．１　基本方程式系

ブシネスク方程式系において、運動方程式と連続の式、熱力学方程式は、

$$\frac{D}{Dt}u-fv=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}p' \quad [1]$$

$$\frac{D}{Dt}v+fu=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial y}p' \quad [2]$$

$$\frac{D}{Dt}w=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}p'+g\frac{\theta'}{\theta_0} \quad [3]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u+\frac{\partial}{\partial y}v+\frac{\partial}{\partial z}w=0 \quad [4]$$

$$\frac{D}{Dt}\theta'+w\frac{d\bar{\theta}}{dz}=0 \quad [5]$$

と書けた。以下では、これらの方程式を用いて、内部重力波の特性を調べる。

９．２　じょう乱場の方程式

ここでは、 y 方向に一様な場を考える。基本場は静止していると仮定し、基本場からの偏差であるじょう乱場については、微小な振幅を考えることにする。じょう乱について１次の項だけを考慮すると、移流項は消去できて、[1]〜[5]は、

$$\frac{\partial}{\partial t}u-fv=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}p' \quad [6]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v+fu=0 \quad [7]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}w=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}p'+g\frac{\theta'}{\theta_0} \quad [8]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u+\frac{\partial}{\partial z}w=0 \quad [9]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta'+w\frac{d\bar{\theta}}{dz}=0 \quad [10]$$

のように線形化される。

[6]を z で、[8]を x で偏微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z}u - f\frac{\partial}{\partial z}v = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}p' \qquad [11]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}w = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}p' + \frac{g}{\theta_0}\frac{\partial}{\partial x}\theta' \qquad [12]$$

が得られる。[11]－[12]を計算して、 p' を消去すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial z}u - \frac{\partial}{\partial x}w\right) - f\frac{\partial}{\partial z}v = -\frac{g}{\theta_0}\frac{\partial}{\partial x}\theta' \qquad [13]$$

となる。両辺を t で偏微分すると、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial}{\partial z}u - \frac{\partial}{\partial x}w\right) - f\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z}v = -\frac{g}{\theta_0}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\theta' \qquad [14]$$

が得られるが、[7]と[10]を代入して、 v と θ' を消去すると、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial z}u - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial x}w + f^2\frac{\partial}{\partial z}u = \frac{g}{\theta_0}\frac{d\bar{\theta}}{dz}\frac{\partial}{\partial x}w$$

となって、ブラント・バイサラ振動数 N^2 を用いると、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial z}u - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial x}w + f^2\frac{\partial}{\partial z}u = N^2\frac{\partial}{\partial x}w \qquad [15]$$

と書ける。両辺を x で偏微分すると、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}u - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}w + f^2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}u = N^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}w \qquad [16]$$

となり、[9]を代入して、 u を消去すると、

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}w - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}w - f^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}w = N^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}w$$

となって、

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - f^2\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}w = \left(N^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}w \qquad [17]$$

が得られる。

９．３　分散関係式

波が[17]を満たすための条件を考える。鉛直風 w の場について波型を仮定して、

$$w = \hat{w}\exp[i(kx + mz - \omega t)] \qquad (k>0, \omega>0) \qquad [18]$$

とする。ただし、 k は東西波数、 m は鉛直波数、 ω は角振動数である。[18]を[17]に代入すると、

$$(\omega^2 - f^2)m^2\hat{w} = (N^2 - \omega^2)k^2\hat{w} \qquad [19]$$

となるので、

$$(\omega^2 - f^2)m^2 = (N^2 - \omega^2)k^2$$

つまり、

$$\frac{m^2}{k^2}=\frac{N^2-\omega^2}{\omega^2-f^2} \qquad [20]$$

が得られる。[20]は、

$$\omega^2=\frac{N^2k^2+f^2m^2}{k^2+m^2} \qquad [21]$$

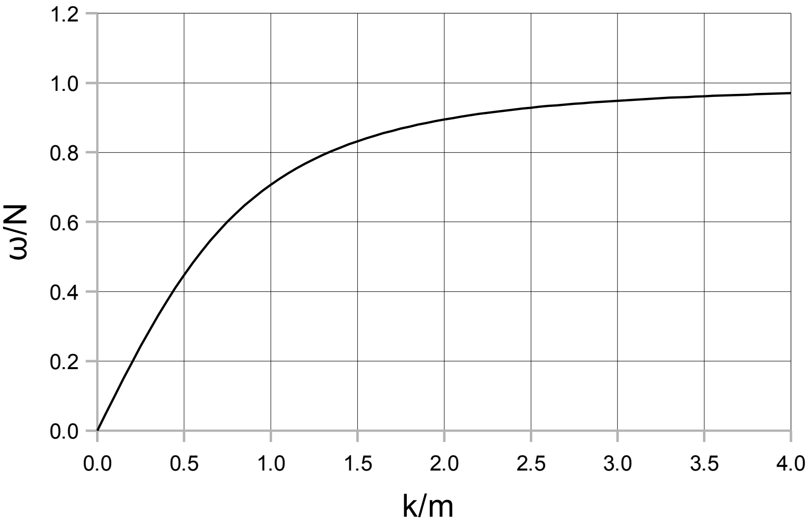
と書くこともできる。コリオリ力を無視すれば、

$$\omega^2=\frac{N^2k^2}{k^2+m^2} \qquad [22]$$

となって、

$$\omega=\frac{Nk}{\sqrt{k^2+m^2}} \qquad [23]$$

が得られる。[23]は内部重力波の**分散関係式**である。



内部重力波の分散関係

９．４　位相速度と群速度

　波の位相が進行する速度を**位相速度**という。一般に、波の位相速度は、

$$c_x=\frac{\omega}{k} \qquad [24]$$

$$c_z=\frac{\omega}{m} \qquad [25]$$

と表せる。内部重力波の分散関係式[23]を[24]、[25]に代入すると、

$$c_x=\frac{N}{\sqrt{k^2+m^2}} \qquad [26]$$

$$c_z=\frac{Nk}{m\sqrt{k^2+m^2}} \qquad [27]$$

が得られる。[26]、[27]より、内部重力波の位相速度は波数によって変化することがわかる。このような波動のことを**分散性波動**という。

一方、波束が進行する速度を**群速度**という。群速度は振幅の大きい場所が移動していく速度であり、波のエネルギーが伝播する速度であると考えられる。一般に、波の群速度 $\vec{c}_g=(c_{gx}, c_{gz})$ は、

$$c_{gx}=\frac{\partial \omega}{\partial k} \quad [28]$$

$$c_{gz}=\frac{\partial \omega}{\partial m} \quad [29]$$

と表せる。[23]を[28]、[29]に代入すると、

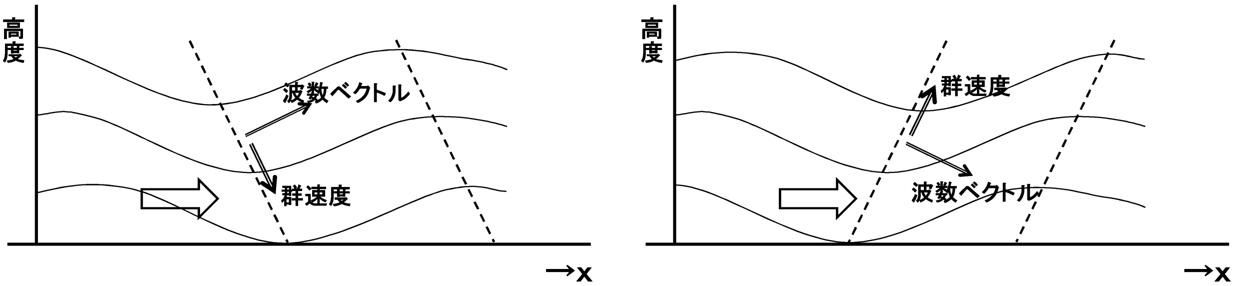
$$c_{gx}=\frac{N m^2}{(k^2+m^2)^{3/2}} \quad [30]$$

$$c_{gz}=-\frac{N km}{(k^2+m^2)^{3/2}} \quad [31]$$

が得られる。[30]、[31]より、

$$\vec{c}_g \cdot \vec{k}=0 \quad [32]$$

だから、内部重力波の群速度ベクトルは波数ベクトルと直交する。内部重力波の波源が下にある場合、エネルギーは上方に伝播するから、 $c_{gz}>0$ である。したがって、[31]より、 $m<0$ である。つまり、エネルギーが上向きに伝播している内部重力波においては、位相は上方に行くにしたがって前方にずれている。



内部重力波の位相速度と群速度（左は $m>0$ 、右は $m<0$ の場合）

課題 9.1　プリミティブ方程式系に代えて、静水圧平衡を仮定したとき、[6]～[10]は、

$$\frac{\partial}{\partial t}u=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}p' \quad ①$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u+\frac{\partial}{\partial z}w=0 \quad ②$$

$$\frac{\partial}{\partial z}p'=\rho_0 g\frac{\theta'}{\theta_0} \quad ③$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta'+w\frac{d\bar{\theta}}{dz}=0 \quad ④$$

のように書き替えられる。ただし、コリオリ力は無視した。①～④において、分散関係式を導き、[23]と比較せよ。

問 9.1　分散関係式[23]を用いて、ブラント・バイサラ振動数が $N=1.0\times10^{-2}$ /s、水平波数が $k=1.0\times10^{-4}$ /m、鉛直波数が $m=1.0\times10^{-3}$ /m のとき、水平方向と鉛直方向の位相速度 c_x、c_z と、群速度 $\vec{c}_g=(c_{gx}, c_{gz})$ を計算せよ（有効数字 2 桁）。

問 9.2　分散関係式[23]を用いて、ブラント・バイサラ振動数が $N=1.0\times10^{-2}$ /s、水平波数が $k=5.0\times10^{-4}$ /m、水平方向の位相速度が $c_x=1.0\times10$ m/s のとき、鉛直波数 m と鉛直方向の位相速度 c_z、群速度 $\vec{c}_g=(c_{gx}, c_{gz})$ を計算せよ（有効数字 2 桁）。

補遺　位相速度と群速度

波の位相が進行する速度を位相速度という。k を東西波数、ω を角振動数とすると、波の位相 θ は、時刻 t 、東西座標 x においては

$$\theta=\theta_0+kx-\omega t \qquad [1]$$

と書ける。[1]は、時刻 $t+\Delta t$ 、東西座標 $x+\Delta x$ においては

$$\theta+\Delta\theta=\theta_0+k(x+\Delta x)-\omega(t+\Delta t) \qquad [2]$$

となる。[1]と[2]との差より、位相の変化 $\Delta\theta$ について、

$$\Delta\theta=k\Delta x-\omega\Delta t \qquad [3]$$

が成り立つ。位相が一定であるためには、

$$k\Delta x-\omega\Delta t=0 \qquad [4]$$

つまり、

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\omega}{k} \qquad [5]$$

でなければならない。したがって、位相が一定の値である場所が移動する速度は、

$$c_x=\frac{\omega}{k} \qquad [6]$$

である。[6]を波の**位相速度**という。

一方、波束が進行する速度を群速度という。つまり、群速度は波の振幅の大きい場所が移動していく速度である。波束とは、異なる波数の波の重ね合わせであり、時刻 t 、東西座標 x においては

$$f(x,t)=\int\hat{f}(k)\exp\left[i\{kx-\omega(k)t\}\right]dk \qquad [7]$$

と表せる。[7]は、時刻 $t+\Delta t$ 、東西座標 $x+\Delta x$ においては

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x,t+\Delta t)&=\int\hat{f}(k)\exp\left[i\{k(x+\Delta x)-\omega(k)(t+\Delta t)\}\right]dk \\ &=\int\hat{f}(k)\exp\left[i\{kx-\omega(k)t\}\right]\exp\left[i\{k\Delta x-\omega(k)\Delta t\}\right]dk \end{aligned} \qquad [8]$$

となる。ここで、波の振幅 $|f(x,t)|$ が、一般に

$$|f(x+\Delta x,t+\Delta t)|=|f(x,t)| \qquad [9]$$

となるためには、

$$\exp\left[i\{k\Delta x-\omega(k)\Delta t\}\right]$$

が k によらず一定でなければならない。このとき、$k\Delta x-\omega(k)\Delta t$ が一定だから、

$$\frac{\partial}{\partial k}\{k\Delta x-\omega(k)\Delta t\}=0 \qquad [10]$$

となって、

$$\Delta x-\frac{\partial\omega}{\partial k}\Delta t=0 \qquad [11]$$

つまり、

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\partial\omega}{\partial k} \qquad [12]$$

が得られる。したがって、振幅が一定の値である場所が移動する速度は、

$$c_{gx}=\frac{\partial\omega}{\partial k} \qquad [13]$$

である。[13]を波の**群速度**という。