６　乱流運動エネルギー

中立成層ではない場合に接地境界層での風速の鉛直分布を調べるためには、機械的な作用に加えて、浮力の作用による乱流の生成・消滅を考慮に入れる必要がある。ここでは、運動方程式から乱流運動エネルギーの時間変化を表す方程式の導出を試みる。

６．１　基本方程式系

ブシネスク方程式系において、運動方程式と連続の式は、

$$\frac{\partial}{\partial t}u+u\frac{\partial}{\partial x}u+v\frac{\partial}{\partial y}u+w\frac{\partial}{\partial z}u=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}p' \quad [1]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v+u\frac{\partial}{\partial x}v+v\frac{\partial}{\partial y}v+w\frac{\partial}{\partial z}v=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial y}p' \quad [2]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}w+u\frac{\partial}{\partial x}w+v\frac{\partial}{\partial y}w+w\frac{\partial}{\partial z}w=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}p'+g\frac{\theta'}{\theta_0} \quad [3]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u+\frac{\partial}{\partial y}v+\frac{\partial}{\partial z}w=0 \quad [4]$$

と書けた。以下では、これらの方程式を用いて、乱流運動エネルギーの時間変化を表す方程式を求める。

６．２　乱流運動エネルギー方程式

ここでも、風速 u 、 v 、 w を、乱流を除いた平均的な状態である基本場と、基本場からの偏差であるじょう乱場に分けて考える。基本場は、水平方向に平均した場として定義する。じょう乱場は、乱流に伴う風速の変動とみなせる。基本場の風は $+x$ の方向に吹いているとすると、 u の基本場における値 $\bar{u}$ は水平方向に一様な値を持ち、 $\bar{v}$ と $\bar{w}$ はゼロである。つまり、

$$\begin{aligned} u&=\bar{u}(z)+u' \\ v&=v' \\ w&=w' \end{aligned} \quad [5]$$

と表せる。[1]に[5]を代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}+u')+(\bar{u}+u')\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}+u')+v'\frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}+u')+w'\frac{\partial}{\partial z}(\bar{u}+u')=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}p'$$

となって、

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}+\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)u'+\left(u'\frac{\partial}{\partial x}+v'\frac{\partial}{\partial y}+w'\frac{\partial}{\partial z}\right)u'+w'\frac{\partial}{\partial z}\bar{u}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}p' \quad [6]$$

が得られる。同様に、[2]、[3]、[4]に[5]を代入すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)v'+\left(u'\frac{\partial}{\partial x}+v'\frac{\partial}{\partial y}+w'\frac{\partial}{\partial z}\right)v'=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial y}p' \quad [7]$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)w'+\left(u'\frac{\partial}{\partial x}+v'\frac{\partial}{\partial y}+w'\frac{\partial}{\partial z}\right)w'=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}p'+g\frac{\theta'}{\theta_0} \quad [8]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u'+\frac{\partial}{\partial y}v'+\frac{\partial}{\partial z}w'=0 \quad [9]$$

が得られる。

[6]の両辺に u' をかけると、

$$u'\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}+u'\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)u'+u'\left(u'\frac{\partial}{\partial x}+v'\frac{\partial}{\partial y}+w'\frac{\partial}{\partial z}\right)u'+u'w'\frac{\partial}{\partial z}\bar{u}=-\frac{1}{\rho_0}u'\frac{\partial}{\partial x}p'$$

ここで、 $\left(\frac{1}{2}f^2\right)'=ff'$ だから、

$$u'\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}+\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{u'^2}{2}\right)+\left(u'\frac{\partial}{\partial x}+v'\frac{\partial}{\partial y}+w'\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{u'^2}{2}\right)+u'w'\frac{\partial}{\partial z}\bar{u}=-\frac{1}{\rho_0}u'\frac{\partial}{\partial x}p' \quad [10]$$

同様に、[7]の両辺に v' をかけると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{v'^2}{2}\right)+\left(u'\frac{\partial}{\partial x}+v'\frac{\partial}{\partial y}+w'\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{v'^2}{2}\right)=-\frac{1}{\rho_0}v'\frac{\partial}{\partial y}p' \quad [11]$$

[8]の両辺に w' をかけると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{w'^2}{2}\right)+\left(u'\frac{\partial}{\partial x}+v'\frac{\partial}{\partial y}+w'\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{w'^2}{2}\right)=-\frac{1}{\rho_0}w'\frac{\partial}{\partial z}p'+\frac{g}{\theta_0}w'\theta' \quad [12]$$

[10]＋[11]＋[12]を計算すると、

$$u'\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}+\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{u'^2+v'^2+w'^2}{2}\right)+\left(u'\frac{\partial}{\partial x}+v'\frac{\partial}{\partial y}+w'\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{u'^2+v'^2+w'^2}{2}\right)+u'w'\frac{\partial}{\partial z}\bar{u}=-\frac{1}{\rho_0}\left(u'\frac{\partial}{\partial x}+v'\frac{\partial}{\partial y}+w'\frac{\partial}{\partial z}\right)p'+\frac{g}{\theta_0}w'\theta' \quad [13]$$

が得られる。ここで、**乱流運動エネルギー**を

$$e=\frac{u'^2+v'^2+w'^2}{2} \quad [14]$$

と定義すると、[13]は

$$u'\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}+\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)e+\left(u'\frac{\partial}{\partial x}+v'\frac{\partial}{\partial y}+w'\frac{\partial}{\partial z}\right)e+u'w'\frac{\partial}{\partial z}\bar{u}=-\frac{1}{\rho_0}\left(u'\frac{\partial}{\partial x}+v'\frac{\partial}{\partial y}+w'\frac{\partial}{\partial z}\right)p'+\frac{g}{\theta_0}w'\theta' \quad [15]$$

と書ける。ここで、積の微分の公式 $fg'=(fg)'-f'g$ を用いると、

$$u'\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}+\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)e+\frac{\partial}{\partial x}(u'e)+\frac{\partial}{\partial y}(v'e)+\frac{\partial}{\partial z}(w'e)-e\left(\frac{\partial}{\partial x}u'+\frac{\partial}{\partial y}v'+\frac{\partial}{\partial z}w'\right)+u'w'\frac{\partial}{\partial z}\bar{u}$$
$$=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}(u'p')-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial y}(v'p')-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}(w'p')+\frac{1}{\rho_0}p'\left(\frac{\partial}{\partial x}u'+\frac{\partial}{\partial y}v'+\frac{\partial}{\partial z}w'\right)+\frac{g}{\theta_0}w'\theta'$$

と変形できるが、さらに、連続の式[9]を用いると、

$$
u'\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}+\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)e+\frac{\partial}{\partial x}(u'e)+\frac{\partial}{\partial y}(v'e)+\frac{\partial}{\partial z}(w'e)+u'w'\frac{\partial}{\partial z}\bar{u}
=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}(u'p')-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial y}(v'p')-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}(w'p')+\frac{g}{\theta_0}w'\theta' \quad [16]
$$

が得られる。

ここで、[16]を水平方向（ x 方向と y 方向）に平均すると、

$$
\overline{\frac{\partial}{\partial t}e}+\bar{u}\overline{\frac{\partial}{\partial x}e}+\overline{\frac{\partial}{\partial x}(u'e)}+\overline{\frac{\partial}{\partial y}(v'e)}+\overline{\frac{\partial}{\partial z}(w'e)}+\overline{u'w'}\frac{\partial}{\partial z}\bar{u}
=-\frac{1}{\rho_0}\overline{\frac{\partial}{\partial x}(u'p')}-\frac{1}{\rho_0}\overline{\frac{\partial}{\partial y}(v'p')}-\frac{1}{\rho_0}\overline{\frac{\partial}{\partial z}(w'p')}+\frac{g}{\theta_0}\overline{w'\theta'} \quad [17]
$$

となる。水平方向の微分を十分に広い範囲で水平方向に平均するとゼロに収束するから、

$$
\overline{\frac{\partial}{\partial t}e}+\overline{\frac{\partial}{\partial z}w'e}+\overline{u'w'}\frac{\partial}{\partial z}\bar{u}=-\frac{1}{\rho_0}\overline{\frac{\partial}{\partial z}w'p'}+\frac{g}{\theta_0}\overline{w'\theta'}
$$

となって、乱流運動エネルギーの時間変化は、

$$
\frac{\partial}{\partial t}\bar{e}=-\overline{u'w'}\frac{\partial}{\partial z}\bar{u}+\frac{g}{\theta_0}\overline{w'\theta'}-\frac{\partial}{\partial z}\overline{w'e}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\overline{w'p'} \quad [18]
$$

と表せる。さらに、乱流運動エネルギーの散逸 ϵ を考慮すると、

$$
\frac{\partial}{\partial t}\bar{e}=-\overline{u'w'}\frac{\partial}{\partial z}\bar{u}+\frac{g}{\theta_0}\overline{w'\theta'}-\frac{\partial}{\partial z}\overline{w'e}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\overline{w'p'}-\bar{\epsilon} \quad [19]
$$

と書ける。[19]は**乱流運動エネルギー方程式**とよばれる。

[19]で、 $\overline{u'w'}$ は乱流運動量フラックス、 $\overline{w'\theta'}$ は**乱流熱フラックス**である。乱流運動量フラックス $\overline{u'w'}$ は風が持っている運動量を地表面に向けて下向きに運ぶので負である。一方、乱流熱フラックス $\overline{w'\theta'}$ は、不安定成層の場合は上向きに熱を運ぶので正、安定成層の場合は下向きに熱を運ぶので負である。接地境界層内では、乱流運動量フラックス、乱流熱フラックスは鉛直方向に一定である。

[19]の右辺第1項は、機械的な作用による乱流エネルギーの生成を表す。基本場の風速に鉛直勾配があるとき、乱流が風速の大きい場所から小さい場所に向けて運動量を輸送すると乱流運動エネルギーが生成されることを示している。 $\overline{u'w'}$ が負なので、この項は常に正である。第2項は、浮力の作用による乱流エネルギーの生成・消滅を表す。上昇流になっている場所で高温偏差が生じ浮力が発生する場合に、浮力の仕事によって乱流運動エネルギーが生成されることを示している。この項は、不安定成層のときは正、安定成層のときは負である。第3項は、乱流運動エネルギーの、乱流による輸送、第4項は鉛直風と圧力偏差との相互作用を表す。いずれも、鉛直積分すればゼロであり、乱流運動エネルギーの正味の生成・消滅には寄与しない。

問 6.1　中立成層の環境で、地上10mの風速が5m/sである。地上10mにおける、機械的な作用による乱流運動エネルギーの生成を計算せよ（有効数字2桁）。風速の対数分布則を用いてよい。カルマン定数は $k=0.4$ とする。地表面の粗度が 10^{-3} m の場合と 0.1 m の場合について計算せよ。