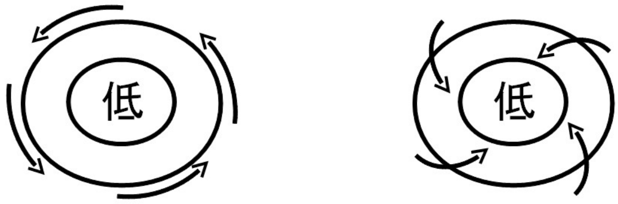
## ４　エクマン境界層

地衡風平衡が成り立つ場合、風は等圧線に平衡に吹くため、低気圧や高気圧があっても、風が収束したり発散したりすることはない。しかし、地面との摩擦を考慮すると、地面付近の風は高気圧側から低気圧側に向かって、等圧線を横切って吹くようになる。このため、低気圧や高気圧では水平風の収束、発散が生じる。ここでは、地面付近において、摩擦の効果によって生じる、地衡風からのずれを定量的に考察し、さらに、低気圧や高気圧で生じる水平風の収束、発散について議論する。




低気圧のまわりの風の模式図（左：摩擦がない場合、右：摩擦がある場合）

### ４．１　エクマン境界層

ブシネスク方程式系において、浮力項を消去し、コリオリ力を考慮すると、水平方向の運動方程式は、

$$\frac{D}{Dt}u - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u \qquad [1]$$

$$\frac{D}{Dt}v + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\nabla^2 v \qquad [2]$$

と書ける。コリオリ係数 $f$ と粘性係数 $\nu$ 、密度 $\rho$ は一定とする。運動量の鉛直移流の効果を無視し、時間変化せず水平方向に一様な場を考えると、 $\frac{D}{Dt}u=0$ 、 $\frac{D}{Dt}v=0$ だから、

$$fv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{d^2}{dz^2}u = 0 \qquad [3]$$

$$-fu - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\frac{d^2}{dz^2}v = 0 \qquad [4]$$

となる。気圧傾度力は高度によらず一定とする。地衡風を

$$u_0 = -\frac{1}{f\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad [5]$$

$$v_0 = \frac{1}{f\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad [6]$$

と定義すると、

$$f\left(v - v_0\right) + \nu\frac{d^2}{dz^2}u = 0 \qquad [7]$$

$$-f\left(u - u_0\right) + \nu\frac{d^2}{dz^2}v = 0 \qquad [8]$$

と書ける。 $u' = u - u_0$ 、 $v' = v - v_0$ とおくと、

$$f\,v'+\nu\frac{d^2}{dz^2}u'=0 \qquad [9]$$

$$-f\,u'+\nu\frac{d^2}{dz^2}v'=0 \qquad [10]$$

となる。[9]を $z$ で2回微分すると、

$$f\frac{d^2}{dz^2}v'+\nu\frac{d^4}{dz^4}u'=0 \qquad [11]$$

となり、[11]を[10]に代入して、 $v'$ を消去すると、

$$\nu^2\frac{d^4}{dz^4}u'+f^2u'=0 \qquad [12]$$

が得られる。[12]を定数係数の線形常微分方程式として解くと、

$$u'=e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}+C_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}\right)+e^{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}+C_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}\right) \qquad [13]$$

ただし、

$$H=\sqrt{\frac{\nu}{f}} \qquad [14]$$

さらに、[9]を用いると、

$$v'=e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}}\left(-C_1\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}+C_2\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}\right)+e^{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}}\left(C_3\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}-C_4\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}\right) \qquad [15]$$

境界条件として、地表面では、 $u=0$ 、 $v=0$ とすると、

$$u'=-u_0,\quad v'=-v_0\quad (z=0) \qquad [16]$$

だから、

$$C_1+C_3=-u_0,\quad C_2-C_4=-v_0 \qquad [17]$$

無限上方では、風速 $(u,v)$ は地衡風速 $(u_{0,}v_0)$ に収束するとすると、

$$u'\to 0,\quad v'\to 0\quad (z\to+\infty) \qquad [18]$$

だから、

$$C_3=0,\quad C_4=0 \qquad [19]$$

[17]、[19]より、

$$C_1=-u_0,\quad C_2=-v_0 \qquad [20]$$

[17]、[20]を[13]、[15]に代入して、

$$u'=e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}}\left(-u_0\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}-v_0\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}\right) \qquad [21]$$

$$v'=e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}}\left(u_0\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}-v_0\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}\right) \qquad [22]$$

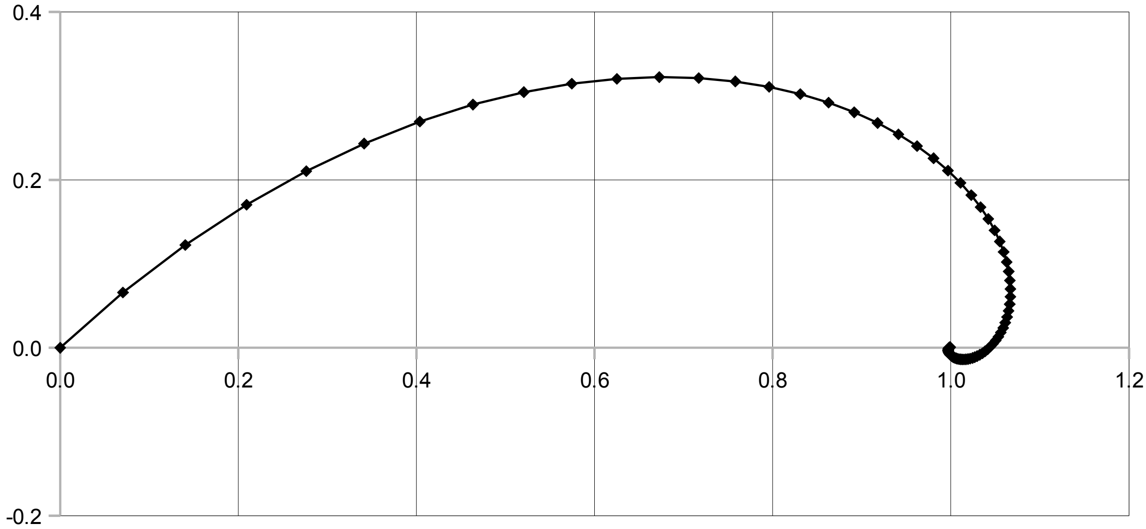
となって、

$$u=u_0\left(1-e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}\right)-v_0e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H} \qquad [23]$$

$$v = u_0 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H} + v_0 \left( 1 - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H} \right) \quad [24]$$

が得られる。

$(u, v)$ の高度変化を図示すると、図のようになる。地表（ $z=0$ ）では $(u, v)=(0,0)$ であるが、上空に行くにつれて地衡風 $(u, v)=(u_0, v_0)$ に近づいていく。ただし、風速ベクトルは直線的に変化していくわけではなく、らせんを描くようにして変化することが分かる。これを**エクマンらせん**とよぶことがある。また、粘性係数 $\nu$ が鉛直方向にほぼ一定で、このような風速分布が成り立つ境界層を**エクマン境界層**という。エクマン境界層では、気圧の高いほうから低いほうへ吹く成分があることがわかる。




$(u, v)$ の高度変化（ $(u_0, v_0)=(1,0)$ の場合）

エクマン境界層の鉛直スケールは[14]で定義した $H$ によって決まる。中緯度における典型的な条件として、コリオリ係数を $f=10^{-4}$ /s、粘性係数を $\nu=10$ m²/s とすれば、$H=300$ m である。つまり、エクマンらせんが明瞭にみられるエクマン境界層の厚さは数 100m から 1km 程度である。

## ４．２　エクマン収束・発散

上の図より、エクマン境界層での風速を鉛直方向に積分すると、低気圧に向かって正味で風が吹き込み、高気圧から風が吹き出していることが期待される。また、これに伴い、エクマン境界層の上端では鉛直流が生じていると考えられる。

ブシネスク方程式系において、連続の式は、

$$\frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v + \frac{\partial}{\partial z} w = 0 \quad [25]$$

と書けた。地表面からじゅうぶん上方まで鉛直積分して、エクマン境界層上端での鉛直風 $w_E$ を計算する。[25]を用い、地表面では $w=0$ であることを考慮すると、

$$w_E=\int_0^{+\infty}\frac{\partial w}{\partial z}dz=-\int_0^{+\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dz \quad [26]$$

が得られる。

[23]、[24]より、水平風の発散を計算すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}&=-\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}-\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}+\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)\left(1-e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}\right)\\&=-\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}-\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}\end{aligned} \quad [27]$$

となる。ここで、

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}=0$$

であることを用いた。[27]を鉛直方向に積分すると、

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dz=-\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}-\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\int_0^{+\infty}\left(e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{H}\right)dz=-\frac{\sqrt{2}}{2}H\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}-\frac{\partial u_0}{\partial y}\right) \quad [28]$$

が得られる。ただし、

$$\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x\,dx=\frac{1}{2} \quad [29]$$

を用いた。地衡風の渦度に比例して水平風の収束、発散が生じていることがわかる。このような収束、発散のことを、**エクマン収束**、**エクマン発散**とよぶ。

さらに、[26]、[28]より、エクマン境界層の上端での鉛直風 $w_E$ は、

$$w_E=-\int_0^{+\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dz=\frac{\sqrt{2}}{2}H\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}-\frac{\partial u_0}{\partial y}\right) \quad [27]$$

と求められる。鉛直風は地衡風の渦度に比例し、低気圧性の渦度に対応して上昇流が生じることがわかる。低気圧の中心付近で水平風の収束や上昇流、高気圧の中心付近で発散や下降流が生じるのは、このためである。

**問 4. 1**　北半球において、ある台風の中心では地表面付近の地衡風速はゼロ、中心からの距離に比例して地衡風速が増大し、中心から 100km の場所では反時計回りに $2.0\times10$ m/s であるとする。地衡風の渦度を有効数字 2 桁まで求めよ。

**問 4. 2**　前問の台風について、コリオリ係数を $f=5.0\times10^{-5}$ /s、粘性係数を $\nu=1.0\times10$ m²/s として、エクマン境界層の厚さのスケール $H=\sqrt{\frac{\nu}{f}}$ を有効数字 2 桁まで求めよ。

**問 4. 3**　前問までの結果を用いて、エクマン境界層上端での鉛直風 $w_E$ を有効数字 2 桁まで求めよ。