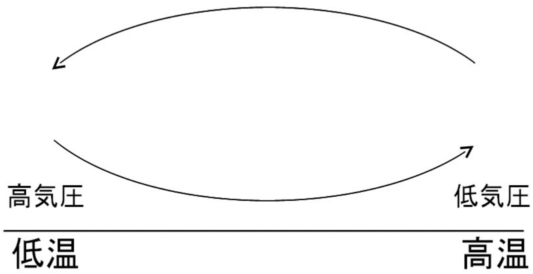
２　水平対流

陸よりも海のほうが熱容量が大きいので、昼間に日射によって加熱が生じると、陸のほうが早く温まる。このため、海よりも陸のほうが高温になる。これに伴って、陸上は低気圧、海上は高気圧になるので、海から陸に向かって風が吹く。これを海風という。夜間は、逆に、陸から海に向かう風が吹き、これを陸風という。こうした循環を海陸風循環とよぶ。山の斜面においては、同様に、昼間に谷風、夜間に山風が吹き、これらを山谷風循環とよぶ。このような、水平方向の温度差によって生じる対流を**水平対流**という。一般には、高温で軽い空気が上昇し、低温で重い空気が下降する、というように説明されることもあるが、水平対流においては、常に安定成層が保たれている。また、水平スケールが鉛直スケールよりも大きいことも水平対流の特徴である。



２．１　基本方程式系

ここでは、水平対流に関して理論的な理解を試みる。水平対流においては、静水圧平衡が高い精度で成り立っているとは限らないので、ブシネスク方程式系を用いる。ブシネスク方程式系は、

$$\frac{D}{Dt}u=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial x}p'+\nu\nabla^2 u \tag{1}$$

$$\frac{D}{Dt}w=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial z}p'+g\frac{\theta'}{\bar{\theta}}+\nu\nabla^2 w \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u+\frac{\partial}{\partial z}w=0 \tag{3}$$

$$\frac{D}{Dt}\theta'+w\frac{d\bar{\theta}}{dz}=\kappa\nabla^2\theta' \tag{4}$$

と書けた。以下では、微小な振幅を考えることにする。じょう乱について１次の項だけを考慮すると、移流項は消去できて、[1]、[2]、[4]は、

$$\frac{\partial}{\partial t}u=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial x}p'+\nu\nabla^2 u \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}w=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial z}p'+g\frac{\theta'}{\bar{\theta}}+\nu\nabla^2 w \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta'+w\frac{d\bar{\theta}}{dz}=\kappa\nabla^2\theta' \tag{7}$$

のように線形化される。定常状態を考えるので、時間微分を消去して、

$$0=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial x}p'+\nu\nabla^2 u \tag{8}$$

$$0=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial z}p'+g\frac{\theta'}{\bar{\theta}}+\nu\nabla^2 w \qquad [9]$$

$$w\frac{d\bar{\theta}}{dz}=\kappa\nabla^2\theta' \qquad [10]$$

が得られる。$\frac{d\bar{\theta}}{dz}$ は z によらず一定とする。以下、[3]、[8]〜[10]を連立偏微分方程式として解く。

２．２　連立偏微分方程式の解法

[8]を z で、[9]を x で偏微分すると、

$$0=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}p'+\nu\nabla^2\frac{\partial}{\partial z}u \qquad [11]$$

$$0=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}p'+\frac{g}{\bar{\theta}}\frac{\partial}{\partial x}\theta'+\nu\nabla^2\frac{\partial}{\partial x}w \qquad [12]$$

が得られる。[12]−[11]を計算して、p' を消去すると、

$$\nu\nabla^2\left(\frac{\partial}{\partial x}w-\frac{\partial}{\partial z}u\right)+\frac{g}{\bar{\theta}}\frac{\partial}{\partial x}\theta'=0 \qquad [13]$$

となる。$\bar{\theta}$ を定数とみなして、両辺に ∇^2 をかけると、

$$\nu\nabla^2\nabla^2\left(\frac{\partial}{\partial x}w-\frac{\partial}{\partial z}u\right)+\frac{g}{\bar{\theta}}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\theta'=0 \qquad [14]$$

が得られるが、[10]を代入して、θ' を消去すると、

$$\kappa\nu\nabla^2\nabla^2\left(\frac{\partial}{\partial x}w-\frac{\partial}{\partial z}u\right)+\frac{g}{\bar{\theta}}\frac{d\bar{\theta}}{dz}\frac{\partial}{\partial x}w=0 \qquad [15]$$

となる。ブラント・バイサラ振動数 N^2 を用いると、

$$\kappa\nu\nabla^2\nabla^2\left(\frac{\partial}{\partial x}w-\frac{\partial}{\partial z}u\right)+N^2\frac{\partial}{\partial x}w=0 \qquad [16]$$

と書ける。両辺を x で偏微分すると、

$$\kappa\nu\nabla^2\nabla^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}u\right)+N^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}w=0 \qquad [17]$$

となるが、[3]を用いて、u を消去すると、

$$\kappa\nu\nabla^2\nabla^2\nabla^2 w+N^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}w=0 \qquad [18]$$

が得られる。

２．３　鉛直流の空間構造

鉛直スケールが水平スケールに比べてじゅうぶんに小さい現象を対象にしているので、

$$\nabla^2\approx\frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad [19]$$

と近似できて、[18]は

$$\kappa\nu\frac{\partial^6}{\partial z^6}w+N^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}w=0 \qquad [20]$$

と書ける。ここで、水平方向に波型を仮定して、

$$w=\hat{w}(z)\exp[ikx] \qquad [21]$$

とすると、

$$\kappa\nu\frac{d^6}{dz^6}\hat{w}-N^2k^2\hat{w}=0 \qquad [22]$$

となる。境界条件として、鉛直風は地表面ではゼロであり、無限上方ではゼロに収束するとして、

$$\hat{w}=0 \quad (z=0) \qquad [23]$$

$$\hat{w}\to 0 \quad (z\to+\infty) \qquad [24]$$

が得られる。また、地表面では摩擦がはたらくので水平風はゼロであり、

$$u=0 \quad (z=0) \qquad [25]$$

が成り立つ。x で偏微分すると、

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad (z=0)$$

となり、[3]を適用すると、

$$\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad (z=0)$$

となって、

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial z}=0 \quad (z=0) \qquad [26]$$

が得られる。

[22]は定数係数の線形常微分方程式である。

$$\hat{w}=C\exp[\lambda z] \qquad [27]$$

とおくと、

$$\kappa\nu\lambda^6-N^2k^2=0 \qquad [28]$$

だから、

$$\lambda=\pm\sqrt[6]{\frac{N^2k^2}{\kappa\nu}},\sqrt[6]{\frac{N^2k^2}{\kappa\nu}}\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\sqrt[6]{\frac{N^2k^2}{\kappa\nu}}\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \qquad [29]$$

[24]より、$z\to+\infty$ で $\hat{w}$ はゼロに収束するから、λ の実部は負でなければならない。この条件を満たす λ は、

$$\lambda=-n,\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)n \qquad [30]$$

である。ただし、

$$n=\sqrt[6]{\frac{N^2k^2}{\kappa\nu}} \qquad [31]$$

[30]を[27]に代入して、

$$\hat{w}=C_1\exp[-nz]+\exp\left[-\frac{1}{2}nz\right]\left(C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}nz+C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}nz\right) \tag{32}$$

[23]より、$z=0$ で $\hat{w}$ はゼロだから、

$$C_1+C_3=0 \tag{33}$$

また、[32]より、

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{w}}{dz}=&-C_1\exp[-nz]\\&+\exp\left[-\frac{1}{2}nz\right]\left[\left(-\frac{1}{2}C_2-\frac{\sqrt{3}}{2}C_3\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}nz+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}C_2-\frac{1}{2}C_3\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}nz\right]\end{aligned} \tag{34}$$

であり、[26]より、$z=0$ で $\dfrac{d\hat{w}}{dz}$ はゼロだから、

$$-C_1+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2-\frac{1}{2}C_3=0 \tag{35}$$

が得られる。[34]、[35]を解くと、

$$C_1=\sqrt{3}C\ ,\quad C_2=C\ ,\quad C_3=-\sqrt{3}C \tag{36}$$

[32]に代入して、

$$\hat{w}=C\left[\sqrt{3}\exp[-nz]+\exp\left[-\frac{1}{2}nz\right]\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}nz-\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}nz\right)\right] \tag{37}$$

２．４　水平風と温位偏差の空間構造

[21]を[3]に代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial x}u+\frac{d\hat{w}}{dz}\exp[ikx]=0 \tag{38}$$

ここで、u についても東西方向に波型を仮定して、

$$u=\hat{u}(z)\exp[ikx] \tag{39}$$

とすると、

$$ik\hat{u}+\frac{d\hat{w}}{dz}=0 \tag{40}$$

となって、

$$\hat{u}=iC\frac{n}{k}\left[-\sqrt{3}\exp[-nz]+\exp\left[-\frac{1}{2}nz\right]\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}nz+\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}nz\right)\right] \tag{41}$$

[19]を考慮すると、[10]は、

$$w\frac{d\bar{\theta}}{dz}=\kappa\frac{\partial^2}{\partial z^2}\theta' \tag{42}$$

と書ける。θ' についても東西方向に波型を仮定して、

$$\theta'=\hat{\theta}(z)\exp[ikx] \tag{43}$$

とする。[21]と[43]を[42]に代入して、

$$\hat{w}\frac{d\bar{\theta}}{dz}=\kappa\frac{d^2}{dz^2}\hat{\theta} \qquad [44]$$

[37]を代入すると、

$$\frac{d^2}{dz^2}\hat{\theta}=C\frac{1}{\kappa}\frac{d\bar{\theta}}{dz}\left[\sqrt{3}\exp[-nz]+\exp\left[-\frac{1}{2}nz\right]\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}nz-\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}nz\right)\right] \qquad [45]$$

ここで、

$$\begin{aligned}
&\int\left(\exp\left[-\frac{1}{2}z\right]\sin\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)dz \\
&= -2\exp\left[-\frac{1}{2}z\right]\sin\frac{\sqrt{3}}{2}z+\int\left(\sqrt{3}\exp\left[-\frac{1}{2}z\right]\cos\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)dz \qquad [46] \\
&= -2\exp\left[-\frac{1}{2}z\right]\sin\frac{\sqrt{3}}{2}z-2\sqrt{3}\exp\left[-\frac{1}{2}z\right]\cos\frac{\sqrt{3}}{2}z-3\int\left(\exp\left[-\frac{1}{2}z\right]\sin\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)dz
\end{aligned}$$

だから

$$\int\left(\exp\left[-\frac{1}{2}z\right]\sin\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)dz=-\frac{1}{2}\exp\left[-\frac{1}{2}z\right]\sin\frac{\sqrt{3}}{2}z-\frac{\sqrt{3}}{2}\exp\left[-\frac{1}{2}z\right]\cos\frac{\sqrt{3}}{2}z \qquad [47]$$

同様に、

$$\int\left(\exp\left[-\frac{1}{2}z\right]\cos\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)dz=-\frac{1}{2}\exp\left[-\frac{1}{2}z\right]\cos\frac{\sqrt{3}}{2}z+\frac{\sqrt{3}}{2}\exp\left[-\frac{1}{2}z\right]\sin\frac{\sqrt{3}}{2}z \qquad [48]$$

ただし、$z\to+\infty$ で $\hat{\theta}\to 0$ であることを考慮して、積分定数はゼロとした。[47]、[48]を用いると、

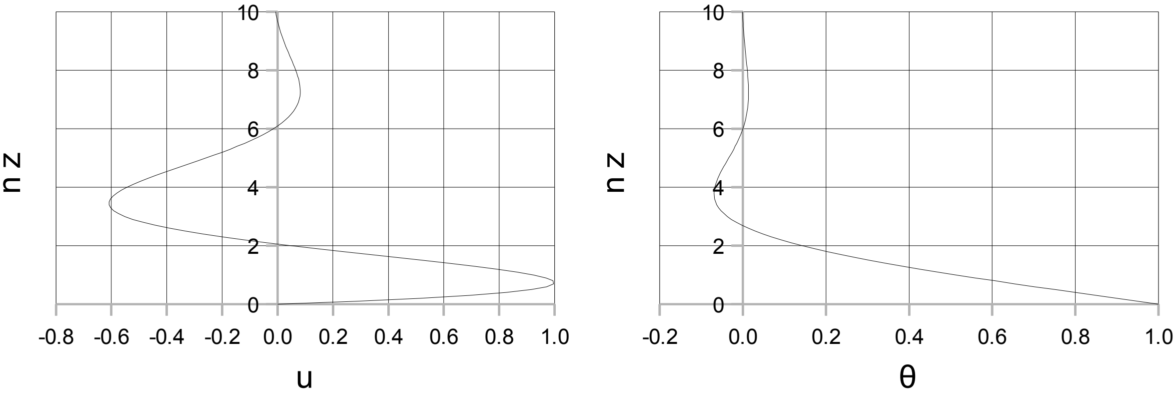
$$\frac{d}{dz}\hat{\theta}=C\frac{1}{\kappa n}\frac{d\bar{\theta}}{dz}\left(-\sqrt{3}\exp[-nz]-2\exp\left[-\frac{1}{2}nz\right]\sin\frac{\sqrt{3}}{2}nz\right) \qquad [49]$$

となって、

$$\hat{\theta}=C\frac{1}{\kappa n^2}\frac{d\bar{\theta}}{dz}\left[\sqrt{3}\exp[-nz]+\exp\left[-\frac{1}{2}nz\right]\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}nz+\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}nz\right)\right] \qquad [50]$$

が得られる。

$\hat{u}$ と $\hat{\theta}$ を図示すると下の図のようになる。ただし、$\hat{u}$、$\hat{\theta}$ とも最大値が 1 になるように横軸を規格化している。現実的な条件を考慮して、ブラント・バイサラ振動数を $N=10^{-2}$ /s、水平波数を $k=3\times10^{-5}$ /m、粘性係数と熱拡散係数を $\kappa=\nu=10$ m²/s とすると、$n\sim3\times10^{-3}$ となる。このとき、$nz=1$ は高度約 300m に相当する。$\hat{u}$ に注目すると、海風や陸風の厚さは 600m 程度であり、その上の高度 1500～2000m 程度までは反流が生じることが確かめられる。また、$\hat{\theta}$ に注目すると、地表面温度に対応する気温偏差は高度 500～1000m 程度までみられ、その上には逆符号の気温偏差が生じていることがわかる。これらの計算結果は典型的な事例における観測事実と整合している。



$\hat{u}$ （左）、 $\hat{\theta}$ （右）の鉛直分布

問 2. 1　温位の代表値が $\bar{\theta}=2.94\times10^{2}$ K、温位の鉛直勾配が $\dfrac{d\bar{\theta}}{dz}=3.0\times10^{-3}$ K/m のとき、ブラント・バイサラ振動数を有効数字 2 桁まで求めよ。ただし、重力加速度を $g=9.8$ m/s^2 とする。

問 2. 2　水平対流に伴う偏差の半波長（極大と極小の間の距離）を $\dfrac{\pi}{k}=1.0\times10^{5}$ m、粘性係数と熱拡散係数を $\kappa=\nu=5.0$ m^2/s としたとき、水平対流の鉛直スケール $n^{-1}=\left(\sqrt[6]{\dfrac{N^2k^2}{\kappa\nu}}\right)^{-1}$（$k$ は偏差の水平波数）を有効数字 2 桁まで求めよ。ブラント・バイサラ振動数は前問で求めた値を用いよ。

問 2. 3　前問までの結果を用いて、地表面における温位偏差の振幅が $\hat{\theta}(z=0)=5.0$ K のとき、水平風の振幅 $\hat{u}(z)/i$ の最大値を有効数字 2 桁まで求めよ。$\hat{u}$ は z の関数なので、$\hat{u}/i$ の値が最大となるときの値を求めることに注意せよ。ただし、関数 $f(x)=-\sqrt{3}\exp[-x]+\exp\left[-\dfrac{1}{2}x\right]\left(\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{3}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ の $x>0$ における最大値は 0.546 であることを用いてよい。