

気象学特論 (bb)

1 ブシネスク方程式系

ここでは、比較的小さな空間スケールでの2次元の水平・鉛直断面で大気の運動を考える。温帯低気圧やロスビー波のような空間スケールの大きい現象に関しては、静水圧平衡を仮定してプリミティブ方程式系を用いることができた。しかし、海陸風循環のような空間スケールが小さい現象に関しては、静水圧平衡が成り立っているとは限らない。そこで、静水圧平衡を仮定しない方程式系の導出を試みる。

1. 1 水平方向の運動方程式

水平方向の運動方程式は、ナビエ・ストークスの方程式より、

$$\frac{D}{Dt}u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p + \nu \nabla^2 u \quad [1]$$

である。ただし、 u は東西風、 p は圧力、 ρ は密度、 ν は粘性係数である。ここで、基本場では、風速はゼロであり、圧力は $\bar{p}$ であるとする。また、じょう乱場における圧力を p' とおいて、 $p = \bar{p} + p'$ とする。このとき、[1]は

$$\frac{D}{Dt}u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} + p') + \nu \nabla^2 u \quad [2]$$

と書ける。また、基本場においても、[1]が成り立っていることを考慮すると、

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{p} = 0 \quad [3]$$

である。[2]、[3]より、じょう乱場における運動方程式として

$$\frac{D}{Dt}u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p' + \nu \nabla^2 u \quad [4]$$

が得られる。さらに、密度 ρ を基本場における密度 $\bar{\rho}$ に置き換えると、近似的に

$$\frac{D}{Dt}u = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} p' + \nu \nabla^2 u \quad [5]$$

と書くことができる。

1. 2 鉛直方向の運動方程式

鉛直方向の運動方程式は、ナビエ・ストークスの方程式より、

$$\frac{D}{Dt}w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} p - g + \nu \nabla^2 w \quad [6]$$

である。基本場では、風速はゼロであり、圧力は $\bar{p}$ 、密度は $\bar{\rho}$ であるとする。 $p = \bar{p} + p'$ 、 $\rho = \bar{\rho} + \rho'$ とおくと、[6]は

$$\frac{D}{Dt}w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p} + p') - \frac{\bar{p} + \rho'}{\rho} g + \nu \nabla^2 w \quad [7]$$

と書ける。また、基本場においても、[6]が成り立っていることを考慮すると、

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{p} = -\bar{\rho} g \quad [8]$$

である。これは静水圧平衡の関係である。[7]、[8]より、じょう乱場における運動方程式として

$$\frac{D}{Dt} w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} p' - \frac{\rho'}{\rho} g + \nu \nabla^2 w \quad [9]$$

が得られる。ここで、理想気体の状態方程式が成り立ち、密度の変動は、温度偏差と圧力偏差によってもたらされるとする。圧力偏差の大きさ $\left| \frac{p'}{\bar{p}} \right|$ が温度偏差の大きさ $\left| \frac{T'}{\bar{T}} \right|$ に比べてじゅうぶんに小さいと仮定すると、密度偏差は温度偏差のみによって決まり、

$$\frac{\rho'}{\rho} \approx \frac{\frac{1}{\bar{T}+T'} - \frac{1}{\bar{T}}}{\frac{1}{\bar{T}+T'}} = -\frac{T'}{\bar{T}} \quad [10]$$

となる。温位の定義より、

$$\frac{dT}{T} = \frac{d\theta}{\theta} + \frac{R}{C_p} \frac{dp}{p} \quad [11]$$

だから、圧力偏差が温度偏差に比べてじゅうぶんに小さい場合には、

$$\frac{T'}{\bar{T}} \approx \frac{\theta'}{\bar{\theta}} \quad [12]$$

と近似できる。[10]、[12]を[9]に代入して、

$$\frac{D}{Dt} w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} p' + g \frac{\theta'}{\bar{\theta}} + \nu \nabla^2 w \quad [13]$$

が得られる。さらに、密度 ρ を基本場における密度 $\bar{\rho}$ に置き換えると、近似的に

$$\frac{D}{Dt} w = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} p' + g \frac{\theta'}{\bar{\theta}} + \nu \nabla^2 w \quad [14]$$

と書くことができる。

1. 3 連続の式

連続の式は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0 \quad [15]$$

と表される。[15]は、

$$\frac{1}{\rho} \frac{D}{Dt} \rho + \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial z} w = 0 \quad [16]$$

と書き換えることができる。ここで、じょう乱の鉛直スケールは大気スケールハイトに比べてじゅうぶんに小さく、基本場の密度 $\bar{\rho}$ は一様であるとする。また、密度の偏差 ρ' の時間変化も小さいとする。このとき、[16]の左辺第1項は、第2項、第3項に比べてじゅうぶんに小さいから、

$$\frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial z} w = 0 \quad [17]$$

が得られる。鉛直方向の運動方程式では密度の偏差による浮力を考慮したが、連続の式では密度の時間変化を無視した。これが**ブシネスク近似**である。

1. 4 熱力学方程式

熱拡散以外には非断熱加熱がない場合には、熱力学方程式は、

$$\frac{D}{Dt}\theta = \kappa \nabla^2 \theta \quad [18]$$

と書ける。ただし κ は熱拡散係数である。温位 θ を基本場 $\bar{\theta}$ とじょう乱場 θ' に分けると、

$$\frac{D}{Dt}\bar{\theta} + \frac{D}{Dt}\theta' = \kappa \nabla^2 (\bar{\theta} + \theta') \quad [19]$$

となる。温位の基本場 $\bar{\theta}$ は高度 z のみに依存し、 z についての二回微分はゼロとすると、[19]は

$$\frac{D}{Dt}\theta' + w \frac{d\bar{\theta}}{dz} = \kappa \nabla^2 \theta' \quad [20]$$

と書くことができる。

以上で導出した、式[5]、[14]、[17]、[20]を**ブシネスク方程式系**という。ブシネスク方程式系は、海陸風循環や山岳波のような比較的空間スケールの小さい現象に対して適用できる。

課題 1.1 ブシネスク方程式系における運動方程式は、

$$\frac{D}{Dt}u = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} p' + \nu \nabla^2 u \quad ①$$

$$\frac{D}{Dt}w = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} p' + g \frac{\theta'}{\bar{\theta}} + \nu \nabla^2 w \quad ②$$

と書ける。ここで、基本場の密度 $\bar{\rho}$ は時間、空間に依存しない定数であり、 $\bar{\theta}$ は高度 z のみに依存する。 ν も定数である。また、

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial z}w = 0 \quad ③$$

が成り立つ。②の x 微分と①の z 微分との差を計算することによって、 $x-z$ 平面上での

渦度 $\left(\frac{\partial}{\partial x}w - \frac{\partial}{\partial z}u \right)$ の時間変化に関する方程式を導出せよ。