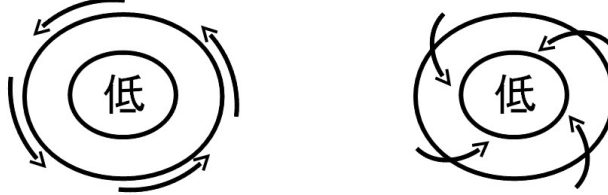


4 エクマン境界層

地衡風平衡が成り立つ場合、風は等圧線に平行に吹くので、低気圧や高気圧があっても、風が収束したり発散したりすることはない。しかし、地面との摩擦を考慮すると、地面付近の風は高気圧側から低気圧側に向かって、等圧線を横切って吹くようになる。このため、低気圧や高気圧では水平風の収束、発散が生じる。ここでは、地面付近において、摩擦の効果によって生じる、地衡風からのずれを計算し、さらに、低気圧や高気圧で生じる水平風の収束、発散について議論する。



低気圧のまわりの風の模式図（左：摩擦がない場合、右：摩擦がある場合）

4. 1 エクマン境界層

ブシネスク方程式系において、浮力項を消去し、コリオリ力を考慮すると、水平方向の運動方程式は、

$$\frac{D}{Dt}u - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad [1]$$

$$\frac{D}{Dt}v + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \quad [2]$$

と書ける。コリオリ係数 f と粘性係数 ν 、密度 ρ は一定とする。運動量の鉛直移流の効果を見捨て、時間変化せず水平方向に一様な場を考えると、 $\frac{D}{Dt}u=0$ 、 $\frac{D}{Dt}v=0$ だから、

$$fv - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{d^2}{dz^2}u = 0 \quad [3]$$

$$-fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{d^2}{dz^2}v = 0 \quad [4]$$

となる。気圧傾度力は高度によらず一定とする。地衡風を

$$u_0 = -\frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad [5]$$

$$v_0 = \frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad [6]$$

と定義すると、

$$f(v - v_0) + \nu \frac{d^2}{dz^2}u = 0 \quad [7]$$

$$-f(u - u_0) + \nu \frac{d^2}{dz^2}v = 0 \quad [8]$$

と書ける。 $u' = u - u_0$ 、 $v' = v - v_0$ とおくと、

$$f v' + v \frac{d^2}{dz^2} u' = 0 \quad [9]$$

$$-f u' + v \frac{d^2}{dz^2} v' = 0 \quad [10]$$

となる。[9]を z で2回微分すると、

$$f \frac{d^2}{dz^2} v' + v \frac{d^4}{dz^4} u' = 0 \quad [11]$$

となり、[11]を[10]に代入して、 v' を消去すると、

$$v^2 \frac{d^4}{dz^4} u' + f^2 u' = 0 \quad [12]$$

が得られる。[12]を定数係数の線形常微分方程式として解くと、

$$u' = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H} + C_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H} \right) + e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H}} \left(C_3 \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H} + C_4 \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H} \right) \quad [13]$$

ただし、

$$H = \sqrt{\frac{v}{f}} \quad [14]$$

さらに、[9]を用いると、

$$v' = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H}} \left(-C_1 \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H} + C_2 \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H} \right) + e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H}} \left(C_3 \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H} - C_4 \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H} \right) \quad [15]$$

境界条件として、地表面では、 $u=0$ 、 $v=0$ とすると、

$$u' = -u_0, \quad v' = -v_0 \quad (z=0) \quad [16]$$

だから、

$$C_1 + C_3 = -u_0, \quad C_2 - C_4 = -v_0 \quad [17]$$

無限上方では、風速 (u, v) は地衡風速 (u_0, v_0) に収束するとすると、

$$u' \rightarrow 0, \quad v' \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow +\infty) \quad [18]$$

だから、

$$C_3 = 0, \quad C_4 = 0 \quad [19]$$

[17]、[19]より、

$$C_1 = -u_0, \quad C_2 = -v_0 \quad [20]$$

[17]、[20]を[13]、[15]に代入して、

$$u' = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H}} \left(-u_0 \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H} - v_0 \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H} \right) \quad [21]$$

$$v' = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H}} \left(u_0 \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H} - v_0 \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H} \right) \quad [22]$$

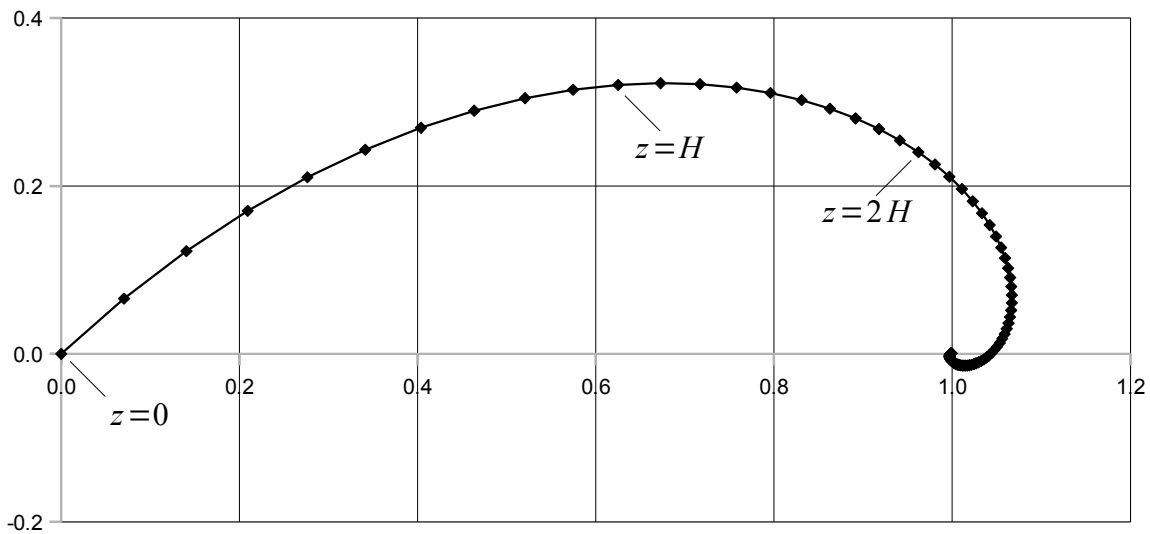
となって、

$$u = u_0 \left(1 - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H}} \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H} \right) - v_0 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H}} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H} \quad [23]$$

$$v = u_0 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H}} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H} + v_0 \left(1 - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H}} \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H} \right) \quad [24]$$

が得られる。

(u, v) の高度変化を図示すると、図のようになる。地表 ($z=0$) では $(u, v)=(0, 0)$ であるが、上空に行くにつれて地衡風 $(u, v)=(u_0, v_0)$ に近づいていく。ただし、風速ベクトルは直線的に変化していくわけではなく、らせんを描くようにして変化することが分かる。これを**エクマンらせん**(Ekman spiral)とよぶことがある。また、粘性係数 ν が鉛直方向にほぼ一定で、このような風速分布が成り立つ境界層を**エクマン境界層**(Ekman boundary layer)という。エクマン境界層では、気圧の高いほうから低いほうへ吹く成分があることがわかる。



(u, v) の高度変化 ($(u_0, v_0)=(1, 0)$ の場合)

エクマン境界層の鉛直スケールは[14]で定義した H によって決まる。中緯度における典型的な条件として、コリオリ係数を $f=10^{-4}$ /s、粘性係数を $\nu=10$ m²/s とすれば、 $H=300$ m である。つまり、エクマンらせんが明瞭にみられるエクマン境界層の厚さは数 100m から 1km 程度である。

4. 2 エクマン収束・発散

上の図より、エクマン境界層での風速を鉛直方向に積分すると、低気圧に向かって正味で風が吹き込み、高気圧から風が吹き出していることが期待される。また、これに伴い、エクマン境界層の上端では鉛直流が生じていると考えられる。

ブシネスク方程式系において、連続の式は、

$$\frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v + \frac{\partial}{\partial z} w = 0 \quad [25]$$

と書けた。地表面からじゅうぶん上方まで鉛直積分して、エクマン境界層上端での鉛直風 w_E を計算する。[25]を用い、地表面では $w=0$ であることを考慮すると、

$$w_E = \int_0^{+\infty} \frac{\partial w}{\partial z} dz = - \int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz \quad [26]$$

が得られる。

[23]、[24]より、水平風の発散を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= - \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H}} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \left(1 - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H}} \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H} \right) \\ &= - \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H}} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H} \end{aligned} \quad [27]$$

となる。ここで、

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0$$

であることを用いた。[27]を鉛直方向に積分すると、

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = - \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H}} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{z}{H} \right) dz = - \frac{\sqrt{2}}{2} H \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \quad [28]$$

が得られる。ただし、

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx = \frac{1}{2} \quad [29]$$

を用いた。地衡風の渦度に比例して水平風の収束、発散が生じていることがわかる。このような収束、発散のことを、**エクマン収束**(Ekman convergence)、**エクマン発散**(Ekman divergence)とよぶ。

さらに、[26]、[28]より、エクマン境界層の上端での鉛直風 w_E は、

$$w_E = - \int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = \frac{\sqrt{2}}{2} H \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \quad [30]$$

と求められる。鉛直風は地衡風の渦度に比例し、低気圧性の渦度に対応して上昇流が生じることがわかる。低気圧の中心付近で水平風の収束や上昇流、高気圧の中心付近で発散や下降流が生じるのは、このためである。

問 4.1 北半球において、ある台風の中心では地表面付近の地衡風速はゼロ、中心からの距離に比例して地衡風速が増大し、中心から 100km の場所では反時計回りに 2.0×10 m/s であるとする。地衡風の渦度を有効数字 2 桁まで求めよ。

問 4.2 前問の台風について、コリオリ係数を $f = 5.0 \times 10^{-5}$ /s、粘性係数を $\nu = 1.0 \times 10$ m²/s として、エクマン境界層の厚さのスケール $H = \sqrt{\frac{\nu}{f}}$ を有効数字 2 桁まで求めよ。

問 4.3 前問までの結果を用いて、エクマン境界層上端での鉛直風 w_E を有効数字 2 桁まで求めよ。