

気象学特論（ローカル気象学）

（2018 年度春学期）

目次

1	ブシネスク方程式系	1
2	水平対流	4
3	鉛直対流	12
4	エクマン境界層	21
5	接地境界層	25
6	乱流運動エネルギー	30
7	モニン・オブコフの相似則	33
8	地表面熱フラックス	39
9	内部重力波	45
10	山岳波	52

1 ブシネスク方程式系

ここでは、比較的小さな空間スケールでの2次元の水平・鉛直断面で大気の運動を考える。温帯低気圧やロスビー波のような空間スケールの大きい現象に関しては、静水圧平衡を仮定して**プリミティブ方程式系**(primitive equations)を用いることができた。しかし、海陸風循環のような空間スケールが小さい現象に関しては、静水圧平衡が成り立っているとは限らない。そこで、静水圧平衡を仮定しない方程式系の導出を試みる。

1. 1 水平方向の運動方程式

水平方向の運動方程式は、**ナビエ・ストークスの方程式**(Navier-Stokes equations)より、

$$\frac{D}{Dt}u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p + \nu \nabla^2 u \quad [1]$$

である。ただし、 u は東西風、 p は圧力、 ρ は密度、 ν は粘性係数である。ここで、基本場では、風速はゼロであり、圧力は $\bar{p}$ であるとする。また、じょう乱場における圧力を p' とおいて、 $p = \bar{p} + p'$ とする。このとき、[1]は

$$\frac{D}{Dt}u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} + p') + \nu \nabla^2 u \quad [2]$$

と書ける。また、基本場においても、[1]が成り立っていることを考慮すると、

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{p} = 0 \quad [3]$$

である。[2]、[3]より、じょう乱場における運動方程式として

$$\frac{D}{Dt}u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p' + \nu \nabla^2 u \quad [4]$$

が得られる。さらに、密度 ρ を基本場における密度 $\bar{\rho}$ に置き換えると、近似的に

$$\frac{D}{Dt}u = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} p' + \nu \nabla^2 u \quad [5]$$

と書くことができる。

1. 2 鉛直方向の運動方程式

鉛直方向の運動方程式は、ナビエ・ストークスの方程式より、

$$\frac{D}{Dt}w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} p - g + \nu \nabla^2 w \quad [6]$$

である。ただし、 w は鉛直風、 g は重力加速度である。基本場では、風速はゼロであり、圧力は $\bar{p}$ 、密度は $\bar{\rho}$ であるとする。 $p = \bar{p} + p'$ 、 $\rho = \bar{\rho} + \rho'$ とおくと、[6]は

$$\frac{D}{Dt}w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p} + p') - \frac{\bar{\rho} + \rho'}{\rho} g + \nu \nabla^2 w \quad [7]$$

と書ける。また、基本場においても、[6]が成り立っていることを考慮すると、

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{p} = -\bar{\rho} g \quad [8]$$

である。これは静水圧平衡の関係である。[7]、[8]より、じょう乱場における運動方程式

として

$$\frac{D}{Dt}w = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}p' - \frac{\rho'}{\rho}g + \nu\nabla^2w \quad [9]$$

が得られる。ここで、理想気体の状態方程式が成り立ち、密度の変動は、温度偏差と圧力偏差によってもたらされるとする。圧力偏差の大きさ $\left|\frac{p'}{\bar{p}}\right|$ が温度偏差の大きさ $\left|\frac{T'}{\bar{T}}\right|$ に比べてじゅうぶんに小さいと仮定すると、密度偏差は温度偏差のみによって決まり、

$$\frac{\rho'}{\rho} \approx \frac{\frac{1}{\bar{T}+T'} - \frac{1}{\bar{T}}}{\frac{1}{\bar{T}+T'}} = -\frac{T'}{\bar{T}} \quad [10]$$

となる。温位の定義より、

$$\frac{dT}{T} = \frac{d\theta}{\theta} + \frac{R}{C_p} \frac{dp}{p} \quad [11]$$

だから、圧力偏差が温度偏差に比べてじゅうぶんに小さい場合には、

$$\frac{T'}{\bar{T}} \approx \frac{\theta'}{\bar{\theta}} \quad [12]$$

と近似できる。[10]、[12]を[9]に代入して、

$$\frac{D}{Dt}w = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}p' + g\frac{\theta'}{\bar{\theta}} + \nu\nabla^2w \quad [13]$$

が得られる。さらに、密度 ρ を基本場における密度 $\bar{\rho}$ に置き換えると、近似的に

$$\frac{D}{Dt}w = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial z}p' + g\frac{\theta'}{\bar{\theta}} + \nu\nabla^2w \quad [14]$$

と書くことができる。

1. 3 連続の式

連続の式(continuity equation)は、

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad [15]$$

と表される。[15]は、

$$\frac{1}{\rho}\frac{D}{Dt}\rho + \frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial z}w = 0 \quad [16]$$

と書き換えることができる。ここで、じょう乱の鉛直スケールは大気スケールハイトに比べてじゅうぶんに小さく、基本場の密度 $\bar{\rho}$ は一様であるとする。また、密度の偏差 ρ' の時間変化も小さいとする。このとき、[16]の左辺第1項は、第2項、第3項に比べてじゅうぶんに小さいから、

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial z}w = 0 \quad [17]$$

が得られる。鉛直方向の運動方程式では密度の偏差による浮力を考慮したが、連続の式では密度の時間変化を無視した。これが**ブシネスク近似**(Boussinesq approximation)である。

1. 4 熱力学方程式

熱拡散以外には非断熱加熱がない場合には、**熱力学方程式**(thermodynamic equation)は、

$$\frac{D}{Dt}\theta = \kappa \nabla^2 \theta \quad [18]$$

と書ける。ただし κ は熱拡散係数である。温位 θ を基本場 $\bar{\theta}$ とじょう乱場 θ' に分けると、

$$\frac{D}{Dt}\bar{\theta} + \frac{D}{Dt}\theta' = \kappa \nabla^2 (\bar{\theta} + \theta') \quad [19]$$

となる。温位の基本場 $\bar{\theta}$ は高度 z のみに依存し、 z についての二回微分はゼロとすると、[19]は

$$\frac{D}{Dt}\theta' + w \frac{d\bar{\theta}}{dz} = \kappa \nabla^2 \theta' \quad [20]$$

と書くことができる。

以上で導出した、式[5]、[14]、[17]、[20]を**ブシネスク方程式系**(Boussinesq equations)という。ブシネスク方程式系は、海陸風循環や山岳波のような比較的空間スケールの小さい現象に対して適用できる。

課題 1.1 ブシネスク方程式系における運動方程式は、

$$\frac{D}{Dt}u = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} p' + \nu \nabla^2 u \quad ①$$

$$\frac{D}{Dt}w = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} p' + g \frac{\theta'}{\bar{\theta}} + \nu \nabla^2 w \quad ②$$

と書ける。ここで、基本場の密度 $\bar{\rho}$ は時間、空間に依存しない定数であり、 $\bar{\theta}$ は高度 z のみに依存する。 ν も定数である。また、

$$\frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial z} w = 0 \quad ③$$

が成り立つ。②の x 微分と①の z 微分との差を計算することによって、 $x-z$ 平面上での

渦度 $\left(\frac{\partial}{\partial x} w - \frac{\partial}{\partial z} u \right)$ の時間変化に関する方程式を導出せよ。