

気象学特論（a b）（2017 年度秋学期）
最終テスト

注意：特に指示がない限り、計算問題においては計算過程も示すこと。

1. 浅水波について、以下の問いに答えよ。

（1）水平方向（ x 方向）の長さが十分に長く、深さ H の水が入った水槽の中で浅水波を考える。基本場の流速はゼロとし、波動にともなう水平流を u 、水面の高さの偏差を h とする。ただし、 $|h| \ll H$ である。このとき、 u 、 h についての微分方程式を

$$\frac{\partial}{\partial t} u + g \frac{\partial}{\partial x} h = 0 \quad \text{①}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} h + H \frac{\partial}{\partial x} u = 0 \quad \text{②}$$

と書くことができる。 g は重力加速度である。これら 2 つの微分方程式から h を消去して、 u のみについての微分方程式を導け。

（2）波型の解 $u = \text{Re } A \exp[ik(x - ct)]$ を仮定する。 k は東西波数、 c は位相速度、 A はゼロではない定数である。（1）で得られた、 u についての微分方程式に

$$u = A \exp[ik(x - ct)]$$

を代入することによって、 c を求めよ（ g と H で表せ）。ただし、 k と c は正とする。

(余白)

2. 定常ロスビー波について、以下の問いに答えよ。

(1) 基本場の風は東西成分 (x 成分) のみで、空間的に一様、時間変化はしないと仮定する。このとき、ベータ平面における、非発散の渦度方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi + \beta \frac{\partial}{\partial x} \psi = 0 \quad (1)$$

と書ける。ただし、 β はコリオリ係数の南北微分 (y 微分)、 U は基本場の東西風、 ψ は偏差場の流線関数である。 β と U は正の定数である。この方程式において、波型の解を仮定して、

$$\psi = \text{Re } A \exp[i(kx + ly - \omega t)] \quad (2)$$

とおくことにより、分散関係式 (ω を U 、 β 、 k 、 l で表したもの) を導け。ただし、 k は東西波数 ($k > 0$)、 l は南北波数、 ω は角振動数であり、 A はゼロではない定数である。

(2) (1) で導出した分散関係式において、 ω をゼロとおくことによって、定常ロスビー波の全波数 $K = \sqrt{k^2 + l^2}$ を求め、 β と U で表せ。

(3) (1) で導出した分散関係式を用いて、群速度の東西成分 $c_{gx} = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ を計算し、さらに、(2) の結果を用いることによって、 c_{gx} を U 、 k 、 l で表せ (β を消去せよ)。

(4) (3) と同様にして、群速度の南北成分 $c_{gy} = \frac{\partial \omega}{\partial l}$ を計算すると、

$$c_{gy} = \frac{2kl}{k^2 + l^2} U \quad (3)$$

が得られる。(3) の結果と③を用いて、 c_{gx} と c_{gy} との関係を c_{gx} 、 c_{gy} 、 U で表せ。

ヒント: $(c_{gx} - U)^2$ と c_{gy}^2 を計算し、両者の和が一定値であることを確か

めよ。

3. 2層モデルにおいて傾圧不安定を考える。基本場において、対流圏上層の東西風を U 、下層の東西風を $-U$ とする ($U > 0$)。さらに、微小振幅の偏差場において、上層と下層の流線関数をそれぞれ ψ_1 、 ψ_3 とおく。 ψ_1 、 ψ_3 は南北方向 (y 方向) には一様と仮定し、東西方向 (x 方向) の構造のみを考慮する。このとき、上層と下層での渦度方程式は、それぞれ

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = \omega_2 \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} = -\omega_2 \quad (2)$$

と書ける。ただし、右辺の ω_2 は偏差場における対流圏中層の鉛直 p 速度であって、適切に規格化されている。また、対流圏中層での熱力学方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi_1 - \psi_3) - U \frac{\partial}{\partial x} (\psi_1 + \psi_3) = \frac{1}{\lambda^2} \omega_2 \quad (3)$$

と書ける。 λ は正の定数である。①+②より、

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\psi_1 + \psi_3) + U \frac{\partial^3}{\partial x^3} (\psi_1 - \psi_3) = 0 \quad (4)$$

が得られる。一方、①-②より、

$$U \frac{\partial^3}{\partial x^3} (\psi_1 + \psi_3) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\psi_1 - \psi_3) = 2\omega_2 \quad (5)$$

となり、これと③を組み合わせることによって

$$U \frac{\partial}{\partial x} \left(2\lambda^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (\psi_1 + \psi_3) - \frac{\partial}{\partial t} \left(2\lambda^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (\psi_1 - \psi_3) = 0 \quad (6)$$

が得られる。

ここで、④、⑥において、

$$\psi_M = \frac{\psi_1 + \psi_3}{2}, \quad \psi_T = \frac{\psi_1 - \psi_3}{2} \quad (7)$$

とおく。さらに、波型の解を仮定し、

$$\psi_M = \text{Re } A \exp[i(kx - \omega t)], \quad \psi_T = \text{Re } B \exp[i(kx - \omega t)] \quad (8)$$

とする。ただし、 k は東西波数 ($k > 0$)、 ω は角振動数である。⑧を④に代入することによって、 A と B の関係式を求めと、

$$\omega A - UkB = 0 \quad (9)$$

が得られる。同様に、⑧を⑥に代入することによって、

$$Uk(2\lambda^2 - k^2)A + \omega(2\lambda^2 + k^2)B = 0 \quad (10)$$

が得られる。

(1) 連立方程式⑨、⑩が $A = B = 0$ 以外の解を持つための条件は何か。 U 、 λ 、 k 、 ω の関係式で答えよ。

ヒント：一般に、連立方程式

$$ax + by = 0$$

$$cx + dy = 0$$

が自明ではない解を持つための条件は

$$ad - bc = 0$$

である。

(2) 一般に、じょう乱が成長するためには角振動数が虚数成分を持たなければならない。(1) の結果から、 ω が虚数になるための条件を求め、 k と λ の関係式で答えよ。

(3) 以下では、(2) で求めた条件を満たすじょう乱について考える。偏差場において、対流圏中層の南北風を v_2 、温度を T_2 とおく。このとき、

$$v_2 = \frac{\partial}{\partial x} \psi_M \quad (11)$$

であり、また、 T_2 は ψ_T に比例する (比例定数は正)。さらに、⑨より、 $A = \frac{kU}{\omega} B$ であるが、じょう乱の成長率を σ ($\sigma > 0$) とおくと、 $\omega = i\sigma$ となるので、

$$A = -i \frac{kU}{\sigma} B \quad (12)$$

である。これらの関係を用いて、 $v_2 T_2$ の東西平均 $\overline{v_2 T_2}$ の符号を検討せよ。
 $\overline{v_2 T_2}$ の厳密な表式を求める必要はなく、 v_2 を計算して T_2 との間で符号を比較すればよい。

(4) ⑤より、

$$\omega_2 = U \frac{\partial^3}{\partial x^3} \psi_M + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_T \quad (13)$$

である。この関係を用いて、(2) で求めた条件を満たすじょう乱について、 $\omega_2 T_2$ の東西平均 $\overline{\omega_2 T_2}$ の符号を検討せよ。(3) と同様、 $\overline{\omega_2 T_2}$ の厳密な表式を求める必要はなく、 ω_2 を計算して T_2 との間で符号を比較すればよい。

(余白)