

気象学特論（a b）（2015 年度秋学期） 最終テスト

注意：特に指示がない限り、計算問題においては計算過程も示すこと。

1. 一様な西風が吹いている β 平面での非発散渦度方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 \psi + \beta \frac{\partial}{\partial x} \psi = 0 \quad ①$$

と書ける。ただし、 ψ はじょう乱場の流線関数、 U は基本場の東西風 ($U > 0$)、 β はコリオリ係数の南北微分 ($\beta > 0$) であり、 U と β は定数とする。 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ である。方程式は微小振幅のじょう乱を仮定して線形化されている。

(1) ψ について波型の解を仮定し、

$$\psi = \text{Re } \hat{\Psi} \exp[i(kx + ly - \omega t)] \quad ②$$

とおく。ただし、 k は東西波数 ($k > 0$)、 l は南北波数、 ω は角振動数である (l 、 ω はともに実数)。また、 $\hat{\Psi}$ は定数である。②を①に代入することによって、 ω と k 、 l との関係を求め、 ω を k 、 l 、 U 、 β で表せ。

(2) (1) の結果において、定常を仮定して $\omega = 0$ とおくことによって、定常ロスビー波の全波数 $K = \sqrt{k^2 + l^2}$ を U と β で表せ。

(3) (1) の結果を用いて、群速度の東西成分 $c_{gx} = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ を求め、 k 、 l 、 U 、 β で表せ。

(4) (3) で求めた c_{gx} に対して、(2) の結果を用いることによって β を消去し、定常ロスビー波の群速度の東西成分 c_{gx} を k 、 l 、 U で表せ。

(5) 一般に $0 \leq k^2 \leq k^2 + l^2$ であることを用いて、 U と β が定数であって $k^2 + l^2$ が一定のとき、(4) で得られた c_{gx} のとりうる値の範囲を求め、 U で表せ。

ヒント：定常ロスビー波の位相速度はゼロであるが、群速度は東向き成分を持つ。群速度の東向き成分の大きさは、東西波数、南北波数に依存し、基本場の東西風よりも小さい場合もあるし大きい場合もある。

2. 2層モデルにおいて傾圧不安定を考える。基本場において、対流圏上層の東西風を U 、下層の東西風を $-U$ とする ($U > 0$)。さらに、微小振幅のじょう乱場において、上層と下層の流線関数をそれぞれ ψ_1 、 ψ_3 とおく。 ψ_1 、 ψ_3 は南北方向 (y 方向) には一様と仮定し、東西方向 (x 方向) の構造のみを考慮する。このとき、上層と下層での渦度方程式は、それぞれ

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = \omega_2 \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} = -\omega_2 \quad (2)$$

と書ける。ただし、右辺の ω_2 はじょう乱場における対流圏中層の鉛直 p 速度であって、適切に規格化されている。また、対流圏中層での熱力学方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi_1 - \psi_3) - U \frac{\partial}{\partial x} (\psi_1 + \psi_3) = \frac{1}{\lambda^2} \omega_2 \quad (3)$$

と書ける。 λ は正の定数である。①+②より、

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\psi_1 + \psi_3) + U \frac{\partial^3}{\partial x^3} (\psi_1 - \psi_3) = 0 \quad (4)$$

が得られる。一方、①-②より、

$$U \frac{\partial^3}{\partial x^3} (\psi_1 + \psi_3) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\psi_1 - \psi_3) = 2\omega_2 \quad (5)$$

となり、これと③を組み合わせることによって

$$U \frac{\partial}{\partial x} \left(2\lambda^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (\psi_1 + \psi_3) - \frac{\partial}{\partial t} \left(2\lambda^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (\psi_1 - \psi_3) = 0 \quad (6)$$

が得られる。

(1) ④において、

$$\psi_M = \frac{\psi_1 + \psi_3}{2}, \quad \psi_T = \frac{\psi_1 - \psi_3}{2} \quad (7)$$

とおく。さらに、波型の解を仮定し、

$$\psi_M = \operatorname{Re} A \exp[i(kx - \omega t)], \quad \psi_T = \operatorname{Re} B \exp[i(kx - \omega t)] \quad (8)$$

とする。ただし、 k は東西波数 ($k > 0$)、 ω は角振動数である。⑧を④に代入することによって、 A と B の関係式を求めよ。解答は A 、 B 、 U 、 λ 、 k 、 ω で表せ。

(2) 同様に、⑧を⑥に代入することによって、 A と B の関係式を求めよ。

(3) (1) と (2) で求めた連立方程式が $A = B = 0$ 以外の解を持つための条件は何か。 U 、 λ 、 k 、 ω の関係式で答えよ。

ヒント：一般に、連立方程式

$$ax + by = 0$$

$$cx + dy = 0$$

が自明ではない解を持つための条件は

$$ad - bc = 0$$

である。

(4) (3) の結果から、 ω が虚数になるための条件を求め、 k と λ の関係式で答えよ。

(5) (4) の条件をみたすとき、(3) の結果から、 λ を定数としたときの成長率 $\sqrt{-\omega^2}$ の最大値を求め、 U と λ で表せ。関数 $f(x) = \frac{x(x-2a)}{x+2a}$ (a は正の定数) の $x > 0$ における最小値 $f_{\min}$ は $f_{\min} = -2(3-2\sqrt{2})a$ であることを用いてよい。