

気象学特論（a b）（2013 年度秋学期） 最終テスト

注意：計算問題においては計算過程も示すこと。

1. 準地衡方程式系について、以下の問いに答えよ。

（1）準地衡系において、渦度方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_g \bullet \nabla_p \right) (f_0 + \beta y + \nabla_p^2 \Psi_g) = f_0 \frac{\partial}{\partial p} \omega \quad ①$$

と書ける。ただし、 $\bar{u}_g$ は地衡風、 ω は鉛直流である。 Ψ_g は地衡流線関数であって、

$$u_g = -\frac{\partial \Psi_g}{\partial y}, \quad v_g = \frac{\partial \Psi_g}{\partial x}$$

が成り立つ。また、 ∇_p は等圧面上での水平微分、 f_0 は代表緯度におけるコリオリ係数、 β は代表緯度におけるコリオリ係数の南北微分であって、 f_0 と β は定数である。一方、熱力学方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_g \bullet \nabla_p \right) \left(\frac{f_0}{s^2} \frac{\partial \Psi_g}{\partial p} \right) = -\omega \quad ②$$

と書ける。ここで、

$$s^2 = -\frac{R}{p} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{C_p}} \frac{d\theta_R}{dp}$$

である。ただし、 p_0 は基準となる気圧、 θ_R は基本場の温位であって、 θ_R は p のみに依存する。 R は気体定数、 C_p は定圧比熱であって、いずれも定数である。したがって、 s^2 は p のみの関数である。方程式系①、②から ω を消去して、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_g \bullet \nabla_p \right) q = 0$$

を満たす q を求めよ。

ヒント：②を p で偏微分せよ。一般には $\frac{\partial \vec{u}_g}{\partial p} = \vec{0}$ ではない点に注意せよ。

正しくは、

$$\frac{\partial \vec{u}_g}{\partial p} = \left(-\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Psi_g}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Psi_g}{\partial p} \right)$$

である。

(2) ①、②から、時間微分を消去して、

$$\left(\nabla_p^2 + \frac{f_0^2}{s^2} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \omega = \frac{f_0}{s^2} \frac{\partial}{\partial p} (\vec{u}_g \bullet \nabla_p A) - \nabla_p^2 (\vec{u}_g \bullet \nabla_p B)$$

の形の方程式を導いたとき、この方程式を満たす A 、 B を求めよ。

ヒント：①を p で偏微分し、②に ∇_p^2 を作用させよ。

2. 定常ロスビー波について、以下の問いに答えよ。

(1) 基本場の風は東西成分 (x 成分) のみで、空間的に一様、時間変化はしないと仮定する。このとき、ベータ平面における、非発散の渦度方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi + \beta \frac{\partial}{\partial x} \Psi = 0 \quad ①$$

と書ける。ただし、 β はコリオリ係数の南北微分 (y 微分)、 U は基本場の東西風、 Ψ は偏差場の流線関数である。 β と U は正の定数である。この方程式において、波型の解を仮定して、

$$\Psi = \text{Re } \hat{\Psi} \exp[i(kx + ly - \omega t)] \quad ②$$

とおくことにより、分散関係式 (ω を U 、 β 、 k 、 l で表したもの) を導け。ただし、 k は東西波数、 l は南北波数、 ω は角振動数である。

(2) (1) で導出した分散関係式において、角振動数をゼロとおくことによって、定常ロスビー波の全波数 $K = \sqrt{k^2 + l^2}$ を求め、 β と U で表せ。

(3) (1) で導出した分散関係式を用いて、群速度の東西成分 $c_{g_x} = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ を計算し、さらに、(2) の結果を用いることによって、 c_{g_x} を U 、 k 、 l で表せ (β を消去せよ)。

(4) (3) と同様にして、群速度の南北成分 $c_{g_y} = \frac{\partial \omega}{\partial l}$ を計算し、 U 、 k 、 l で表せ。

(5) (3)、(4) の結果を用いて、 c_{g_x} と c_{g_y} の関係を c_{g_x} 、 c_{g_y} 、 U で表せ。

ヒント : $(c_{g_x} - U)^2$ と $c_{g_y}^2$ を計算し、両者の和が一定値であることを確か

めよ。

3. 二層モデルによって傾圧不安定について考える。基本場では、東西、南北に一樣な東西風が吹いているものとする。β効果は無視する。対流圏上層での地衡流線関数偏差を Ψ_1 、対流圏下層での地衡流線関数偏差を Ψ_3 、対流圏中層での鉛直流を ω_2 とおく。 Ψ_1 、 Ψ_3 、 ω_2 とも南北方向には一樣であるとする。南北温度勾配に伴って基本場の東西風には鉛直シアが生じていて、対流圏上層で U (>0)、中層でゼロ、下層で $-U$ とする。このとき、対流圏上層、下層における渦度方程式は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi_1 = \omega_2 \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi_3 = -\omega_2 \quad (2)$$

と書ける。なお、 ω_2 は、コリオリ係数や鉛直層の厚さを参照して適切に規格化されているので、右辺の ω_2 に係数はつかない。また、熱力学方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Psi_1 - \Psi_3) - U \frac{\partial}{\partial x} (\Psi_1 + \Psi_3) = \frac{1}{\lambda^2} \omega_2 \quad (3)$$

と書ける。 λ は変形半径の逆数であり、正の定数とする。方程式系①～③について以下の設問に答えよ。

(1) Ψ_1 、 Ψ_3 、 ω_2 について波型を仮定し、

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \text{Re } \hat{\Psi}_1 \exp[i(kx - \nu t)] \\ \Psi_3 &= \text{Re } \hat{\Psi}_3 \exp[i(kx - \nu t)] \\ \hat{\omega}_2 &= \text{Re } \hat{\omega}_2 \exp[i(kx - \nu t)] \end{aligned} \quad (4)$$

とおく。ただし、 k (>0)は東西波数、 ν は角振動数である。このとき、①は、

$$-k^2(-i\nu + ikU)\hat{\Psi}_1 = \hat{\omega}_2 \quad (1')$$

と変形できる。同様の変形を②、③についても行なえ。

(2) ①'と(1)の結果から、 $\hat{\Psi}_1$ 、 $\hat{\Psi}_3$ 、 $\hat{\omega}_2$ が満たすべき連立1次方程式を求め、 3×3 行列 A を用いて

$$A \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_1 \\ \hat{\Psi}_3 \\ \hat{\omega}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

と表したとき、 A を求めよ（各要素を ν 、 k 、 U 、 λ を用いて表せ）。

（3）⑤が自明ではない解を持つためには、 A の行列式はゼロでなければならない。この条件を用いて、 ν^2 を k 、 U 、 λ を用いて表せ。

ヒント： 3×3 行列の行列式は、

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

である。